# Informatik – Übungsaufgaben
***Zahlensysteme und ihre Umwandlung***

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

11.02.2007
Version: 1.1

**Zusammenfassung**

Die Übungsaufgaben stammen aus den Übungsaufgaben und Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung »Einführung in die Informatik« von Herrn Prof. Dr. Wassermann an der Ruhr-Universität Bochum im Wintersemester 2006/07.

In diesem Dokument sind sowohl die Übungsaufgaben wie auch Lösungsvorschläge enthalten.

## Inhaltsverzeichnis

# 1. Übungsaufgaben

### ▹ Frage 1

Wandeln Sie die Dezimalzahl 711 in ihre Darstellung bezüglich der Basen 2, 3, 4, 8, 12 und 16 um.

### ▹ Frage 2

Wandeln Sie die Dezimalzahl 654 in ihre Darstellung bezüglich der Basen 2, 7, 8 und 16 um.

### ▹ Frage 3

Führen Sie folgende Zahlenbasisumwandlungen nach der effizientesten Methode aus.

a) Wandeln Sie die Zahl $12011_3$ in die Dezimalnotation um.
b) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl ABCD in eine Binärzahl und eine Dezimalzahl um.
c) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl CAFFEE in eine Oktalzahl um.
d) Wandeln Sie die Zahl $A137_{11}$ in die Dezimalnotation um.
e) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl E1D1 in eine Binär- und in eine Dezimalzahl um.
f) Wandeln Sie die hexadezimalzahl ABCDEF in eine Oktalzahl um.

### ▹ Frage 4

Eine $k$-stellige Zahl $a = a_k \ldots a_0$, dargestellt bezüglich einer Basis $n \geq 2$, ist in ihre $l$-stellige Darstellung $b_l \ldots b_0$ bezüglich einer anderen Basis $m \geq 2$ umzuwandeln. Die Berechnung soll in der Zielbasis $m$ ausgeführt werden. Für die Lösung sollen die beiden folgenden Methoden verwendet werden:

- direktes Ausrechnen des Ausdrucks $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i$ in der Zielbasis m;
- effizientere Methode durch Klammerung des vorhergehenden Ausdrucks.

a) Wieviele Rechenoperationen sind für diese Umwandlung maximal erforderlich nach der ersten und nach der zweiten Methode (Unterschieden werden sollen Multiplikations- und Additionsoperationen)?
b) Multiplikationen können im Binärsystem durch eine kleine Anzahl von Additionen berechnet werden. Wieviele Additionen muß ein Rechner, der kein Multiplikationsbefehl besitzt, maximal für die Umwandlung nach den o. g. Methoden ausführen?

Begründen Sie Ihre Antworten. Zur Bestimmung der Antwort kann die Formel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

verwendet werden.

### ▹ Frage 5

a) Wandeln Sie die Dezimalzahlen 5, 7 und 13 in ihre Binärdarstellung um und berechnen Sie *im Binärsystem*

$$13^2 + 5 \cdot 7.$$

b) Wandeln Sie Dezimalzahl 11 in ihre Binärdarstellung um und dividieren Sie *im Binärsystem* das Ergebnis von Teil a) durch diese Zahl. Bestimmen Sie nur den *ganzzahligen* Quotienten und den Rest.

### ▹ Frage 6

Die ersten beiden *Fibonacci-Zahlen* sind $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Danach ist jede weitere Fibonacci-Zahl als die Zumme ihrer beiden unmittelbaren Vorgänger definiert, d. h. ab $n = 2$ gilt

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$$

a) Berechnen Sie die ersten zehn Fibonacci-Zahlem *im Binärsystem*, d. h. die letzte zu berechnende Zahl ist $F_9$.

b) Berechnen Sie *im Binärsystem* den Quotienten und den Rest der Division von der letzten in Teil a) bestimmten Fibonacci-Zahl $F_9$ durch Fünf.

### ▹ Frage 7

Berechnen Sie die ersten zen Quadratzahlen *im Binärsystem*. Die Zählung beginnt mit 1!

### ▹ Frage 8

Die *babylonische Methode* zur Berechnung von Quadratwurzeln ist leicht auf Computern zu implementieren und geht wie folgt (sie wurde tatsächlich von den Babyloniern erfunden):

Sei $a$ die (positive) Zahl, deren Quadratwurzel zu berechnen ist. Wir konstruieren eine Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Schätzungen für $\sqrt{a}$, die schnell gegen den wahren Wert konvergiert. Dazu nehmen wir $s_0 := 1$ und setzen die Folge durch die rekursive Regel

$$s_{n+1} := \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$$

fort.

Berechnen Sie $\sqrt{2}$ nach dieser Methode, aber unter Beachtung der folgenden Besonderheiten:

- Rechnen Sie im *Binärsystem*
- Die während der Berechnung auftretenden Binärbrüche dürfen Sie, ohne Rundung, nach der achten Stelle *hinter* dem Komma einfach abschneiden.
- Rechnen Sie so viele Schritte, bis Sie die Quadratwurzel, richtig gerundet, auf 6 binärstellen hinter dem Komma genau bestimmt haben.

### ▹ Frage 9

a) Stellen Sie für $b = 2$ (Binärsystem) und $b = 8$ (Oktalsystem) die Dezimalzahlen $x = 13$, $y = -11$ und $z = -6$ im $b$-Komplement mit $r = 5$ Stellen dar.

b) Führen Sie die Rechnungen $x + y$, $y + z$ und $z + z$ schriftlich im $b$-Komplement mit $b = 2$ und $b = 8$ durch und geben Sie das Ergebnis als Zahl mit Vorzeichen im Dezimalsystem an.

c) Stellen Sie die Zahlen $x$, $y$ und $z$ im »Exzess 16« System dar und bilden Sie die Summen $x + y$, $y + z$ und $z + z$ in diesem System.

### ▹ Frage 10

a) Stellen Sie die Zahlen $x = 5$, $y = 1/4$ und $z = -1,7$ als normalisierte Gleitkommazahlen mit $b = 10$ und $b = 2$ (Binärsystem) dar. Dabei sollen Mantisse und Exponent einfach als Zahlen zur jeweiligen Basis mit Vorzeichen dargestellt werden, d. h. sie müssen nicht »rechnergerecht« in einem bestimmten Gleitkommasystem für Computer geschrieben werden, insbesondere in diesem Teil der Aufgabe auch nicht konform zu den IEEE Standards. Binärmantissen, die keine endliche Länge haben, dürfen anch der zehnten Nachkommastelle abgeschnitten werden.

b) Geben Sie die jeweilige Repräsentation der obigen Zahlen als Bitfolge gemäß der IEEE Standardform einfacher Genauigkeit an.

### ▹ Frage 11

Verwandeln Sie folgende IEEE Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit (geschrieben als achtziffrige Hexadezimalzahlen) in Dezimalzahlen. Sehr große oder sehr kleine Zahlen dürfen Sie auch in der »wissenschaftlichen« Notation mit Zweierpotenzen schreiben.

a) 42E48000

b) 3F880000

c) 00800000

d) C7f00000

### ▹ Frage 12

Betrachten Sie die mit acht hexadezimalen Ziffern geschriebenen IEEE Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit $a = 3EE00000$ und $b = 3D800000$.

a) Berechnen Sie die Summe $c := a + b$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.

b) Berechnen Sie die Differenz $d := b - a$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.

c) Berechnen Sie das Produkt $p := b \cdot a$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.

d) Berechnen Sie den Quotienten $q := a/b$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.

Schreiben Sie das Ergebnis jeweils als Zahl mit 8 Hexadezimalziffern.

## 2. Lösungsvorschläge zu den Fragen

**▹ Frage 1**

Wandeln Sie die Dezimalzahl 711 in ihre Darstellung bezüglich der Basen 2, 3, 4, 8, 12 und 16 um.

---

**▹ Antwort 1**

- Basis 2: $711_{10} = \mathbf{1011000111_2}$

$$\begin{aligned} 711_{10} &= 512 + 128 + 64 + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \end{aligned}$$

- Basis 3: $711_{10} = \mathbf{222100_3}$

| i | $Q_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 711 | 0 |
| 1 | 237 | 0 |
| 2 | 79 | 1 |
| 3 | 26 | 2 |
| 4 | 8 | 2 |
| 5 | 2 | 2 |

- Basis 4: $711_{10} = \mathbf{23013_4}$

| i | $Q_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 711 | 3 |
| 1 | 177 | 1 |
| 2 | 44 | 0 |
| 3 | 11 | 3 |
| 4 | 2 | 2 |

- Basis 8: $711_{10} = \mathbf{1307_8}$ ⇒ Bestimmung aus Binärzahl

$$711_{10} = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{111}_{7}$$

- Basis 12: $711_{10} = \mathbf{4B3_{12}}$

| i | $Q_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 711 | 3 |
| 1 | 59 | *B* |
| 2 | 4 | 4 |

- Basis 16: $711_{10} = \mathbf{2C7_{16}}$ ⇒ Bestimmung aus Binärzahl

$$711_{10} = \underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{0111}_{7}$$

Berechnungsweg für die Basen 3, 4 und 12:

- $b_i = Q_i$ mod Basis
- $Q_{i+1} = [Q_i/\text{Basis}]$ *(Ganzzahl)*

### ▹ Frage 2

Wandeln Sie die Dezimalzahl 654 in ihre Darstellung bezüglich der Basen 2, 7, 8 und 16 um.

---

### ▹ Antwort 2

- Basis 2: $654_{10} = \mathbf{1010001110_2}$

$$\begin{aligned} 654_{10} &= 512 + 128 + 8 + 4 + 2 \\ &= 2^9 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1 \end{aligned}$$

- Basis 7: $654_{10} = \mathbf{1623_7}$

| **i** | $\mathbf{Q_i}$ | $\mathbf{b_i}$ |
|---|---|---|
| 0 | 654 | 3 |
| 1 | 93 | 2 |
| 2 | 13 | 6 |
| 3 | 1 | 1 |

- Basis 8: $654_{10} = \mathbf{1216_8} \Rightarrow$ Bestimmung aus Binärzahl

$$654_{10} = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{110}_{6}$$

- Basis 16: $654_{10} = \mathbf{28E_{16}} \Rightarrow$ Bestimmung aus Binärzahl

$$654_{10} = \underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{1110}_{E}$$

### ▹ Frage 3

Führen Sie folgende Zahlenbasisumwandlungen nach der effizientesten Methode aus.

a) Wandeln Sie die Zahl $12011_3$ in die Dezimalnotation um.

b) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl ABCD in eine Binärzahl und eine Dezimalzahl um.

c) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl CAFFEE in eine Oktalzahl um.

d) Wandeln Sie die Zahl $A137_{11}$ in die Dezimalnotation um.

e) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl E1D1 in eine Binär- und in eine Dezimalzahl um.

f) Wandeln Sie die hexadezimalzahl ABCDEF in eine Oktalzahl um.

---

### ▹ Antwort 3

a) nach Klammermethode $(((a_k n + a_{k-1})\, n + a_{k-2})\, n + \cdots + a_1)\, n + a_0$:

$$12011_3 = (((1 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 0) \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 1 = \mathbf{139_{10}}$$

b) mit der Ersetzungstabelle: $A_{16} = 1010_2$, $B_{16} = 1011_2$, $C_{16} = 1100_2$ und $D_{16} = 1101_2$:

$$\mathrm{ABCD}_{16} = \mathbf{1010101111001101_2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ABCD}_{16} &= 13 + 16\,(12 + 16\,(11 + 10 \cdot 16)) \\ &= \mathbf{43981_{10}}\end{aligned}$$

c) Umrechnung über Binärzahlen mit der Ersetzungstabelle: $A_{16} = 1010_2$, $C_{16} = 1100_2$, $E_{16} = 1110_2$ und $F_{16} = 1111_2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{CAFFEE}_{16} &= \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110_2}_{6} \\ &= \mathbf{62577756_8}\end{aligned}$$

d) nach Klammermethode

$$A137_{11} = 7 + 11\,(3 + 11\,(1 + 10 \cdot 11)) = \mathbf{13471_{10}}$$

e) mit der Ersetzungstabelle: $D_{16} = 1101_2$, und $E_{16} = 1110_2$:

$$\mathrm{E1D1}_{16} = \mathbf{1110000111010001_2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E1D1}_{16} &= 1 + 16\,(13 + 16\,(1 + 14 \cdot 16)) \\ &= \mathbf{57809_{10}}\end{aligned}$$

f) Umrechnung über Binärzahlen mit der Ersetzungstabelle: $A_{16} = 1010_2$, $B_{16} = 1011_2$, $C_{16} = 1100_2$, $D_{16} = 1101_2$, $E_{16} = 1110_2$ und $F_{16} = 1111_2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ABCDEF}_{16} &= \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7} \\ &= \mathbf{2536337_8}\end{aligned}$$

### ▹ Frage 4

Eine $k$-stellige Zahl $a = a_k \ldots a_0$, dargestellt bezüglich einer Basis $n \geq 2$, ist in ihre $l$-stellige Darstellung $b_l \ldots b_0$ bezüglich einer anderen Basis $m \geq 2$ umzuwandeln. Die Berechnung soll in der Zielbasis $m$ ausgeführt werden. Für die Lösung sollen die beiden folgenden Methoden verwendet werden:

- direktes Ausrechnen des Ausdrucks $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i$ in der Zielbasis m;
- effizientere Methode durch Klammerung des vorhergehenden Ausdrucks.

a) Wieviele Rechenoperationen sind für diese Umwandlung maximal erforderlich nach der ersten und nach der zweiten Methode (Unterschieden werden sollen Multiplikations- und Additionsoperationen)?

b) Multiplikationen können im Binärsystem durch eine kleine Anzahl von Additionen berechnet werden. Wieviele Additionen muß ein Rechner, der kein Multiplikationsbefehl besitzt, maximal für die Umwandlung nach den o. g. Methoden ausführen?

Begründen Sie Ihre Antworten. Zur Bestimmung der Antwort kann die Formel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

verwendet werden.

---

### ▹ Antwort 4

a) Klammermethode $(((a_k n + a_{k-1})\, n + a_{k-2})\, n + \ldots)\, n + a_0$

   $\Rightarrow$ $k$ Multiplikationen und $k$ Additionen

   $\Rightarrow$ insgesamt $2k$ Rechenoperationen

   Methode $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$

   - Hier werden ebenfalls $k$ Additionen benötigt.
   - Um das Produkt $a_i n^i$ zu bestimmen, werden $k$-Multiplikationen benötigt; um $n^i$ zu bestimmen werden jeweils $i$ Multiplikationen benötigt, wenn $i < 1$ können diese entfallen; d. h. für $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ werden $\sum_{i=1}^{k} i$ Multiplikationen für die Berechnung von allen $n^i$ benötigt.

   $\Rightarrow$ $k$ Additionen und $k + \sum_{i=1}^{k} i$ Multiplikationen, also werden $2k + \sum_{i=1}^{k} i$ Rechenoperationen benötigt.

b)
   - Klammermethode
     $k$ Additionen und $k$ Multiplikationen
     1 Multiplikation kann durch maximal $x$ Additionen ersetzt werden, wobei $x$ die Anzahl der Binärziffern von $n$ bezeichnet, d. h. $xk$ Additionen für die Multiplikation
     $\Rightarrow$ Gesamtanzahl der Additionen: $k + xk = \mathbf{k(x+1)}$
   - Summenausdrucksmethode
     $k$ Additionen und $\sum_{i=1}^{k} i$ Multiplikationen, d. h. $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$
     1 Multiplikation kann durch maximal $x$ Additionen ersetzt werden, wobei $x$ die Anzahl der Binärziffern von $n$ bezeichnet $\rightarrow x\frac{k(k+1)}{2}$
     $\Rightarrow$ Gesamtanzahl der Additionen: $k + x\frac{k(k+1)}{2} = \mathbf{k\left(1 + \frac{1}{2}x(k+1)\right)}$

▹ **Frage 5**

a) Wandeln Sie die Dezimalzahlen 5, 7 und 13 in ihre Binärdarstellung um und berechnen Sie *im Binärsystem*

$$13^2 + 5 \cdot 7.$$

b) Wandeln Sie Dezimalzahl 11 in ihre Binärdarstellung um und dividieren Sie *im Binärsystem* das Ergebnis von Teil a) durch diese Zahl. Bestimmen Sie nur den *ganzzahligen* Quotienten und den Rest.

---

▹ **Antwort 5**

a) $5_{10} = 101_2, 7_{10} = 111_2, 13_{10} = 1101_2$

$$13_{10}^2 = 13_{10} \cdot 13_{10} \qquad \begin{array}{r} 1101 \times 1101 \\ \\ 1101 \\ +\ \ 1101\phantom{0} \\ \hline 1000001 \\ +\ 1101\phantom{000} \\ \hline 10101001 \end{array}$$

$$5 \cdot 7 \qquad \begin{array}{r} 111 \times 101 \\ \\ 111 \\ +\ 111\phantom{00} \\ \hline 100011 \end{array}$$

$$13^2 + 5 \cdot 7 \qquad \begin{array}{r} 10101001 \\ +\ \ 100011 \\ \hline 11001100 \end{array}$$

$13^2 + 5 \cdot 7 = \mathbf{11001100_2}$

b) $11_{10} = 1011_2$

$$\begin{array}{rl} 11001100 & : 1011 = 10010 \\ -1011\phantom{0000} & \\ \hline 1110\phantom{00} & \\ -\ \ 1011\phantom{00} & \\ \hline 110 & \end{array}$$

$11001100_2 : 11_{10} = \mathbf{10010_2}$ mit Rest $110_2$.

### ▹ Frage 6

Die ersten beiden *Fibonacci-Zahlen* sind $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Danach ist jede weitere Fibonacci-Zahl als die Zumme ihrer beiden unmittelbaren Vorgänger definiert, d. h. ab $n = 2$ gilt

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$$

a) Berechnen Sie die ersten zehn Fibonacci-Zahlem *im Binärsystem*, d. h. die letzte zu berechnende Zahl ist $F_9$.

b) Berechnen Sie *im Binärsystem* den Quotienten und den Rest der Division von der letzten in Teil a) bestimmten Fibonacci-Zahl $F_9$ durch Fünf.

---

### ▹ Antwort 6

a)

$$\begin{array}{llll}
F_0 & & = 0_2 & = 0_{10} \\
F_1 & & = 1_2 & = 1_{10} \\
F_2 = F_0 + F_1 & & = 1_2 & = 1_{10} \\
F_3 = F_1 + F_2 & = 1_2 + 1_2 & = 10_2 & = 2_{10} \\
F_4 = F_3 + F_2 & = 10_2 + 1_2 & = 11_2 & = 3_{10} \\
F_5 = F_4 + F_3 & = 11_2 + 10_2 & = 101_2 & = 5_{10} \\
F_6 = F_5 + F_4 & = 101_2 + 11_2 & = 1000_2 & = 8_{10} \\
F_7 = F_6 + F_5 & = 1000_2 + 101_2 & = 1101_2 & = 13_{10} \\
F_8 = F_7 + F_6 & = 1101_2 + 1000_2 & = 10101_2 & = 21_{10} \\
F_9 = F_8 + F_7 & = 10101_2 + 1101_2 & = 100010_2 & = 34_{10}
\end{array}$$

b) $F_9 = 100010_2$, $5_{10} = 101_2$

$$\begin{array}{rl}
100010 & : 101 = 110 \\
-\ 101\phantom{000} & \\
\hline
111\phantom{00} & \\
-\ 101\phantom{00} & \\
\hline
100\phantom{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow F_9 : 5_{10} = 100010_2 : 101_2 = 110_2$ Rest $100_2$

### ▹ Frage 7

Berechnen Sie die ersten zen Quadratzahlen *im Binärsystem*. Die Zählung beginnt mit 1!

---

### ▹ Antwort 7

| $n_{10}$ | $n_2$ | $n_2^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1×1 = 1 |
| 2 | 10 | 10×10 = 100 |
| 3 | 11 | 11×11 = 1001 |
| 4 | 100 | 100×100 = 10000 |
| 5 | 101 | 101×101 = 11001 |
| 6 | 110 | 110×110 = 100100 |
| 7 | 111 | 111×111 = 110001 |
| 8 | 1000 | 1000×1000 = 1000000 |
| 9 | 1001 | 1001×1001 = 1010001 |

### ▹ Frage 8

Die *babylonische Methode* zur Berechnung von Quadratwurzeln ist leicht auf Computern zu implementieren und geht wie folgt (sie wurde tatsächlich von den Babyloniern erfunden):

Sei $a$ die (positive) Zahl, deren Quadratwurzel zu berechnen ist. Wir konstruieren eine Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Schätzungen für $\sqrt{a}$, die schnell gegen den wahren Wert konvergiert. Dazu nehmen wir $s_0 := 1$ und setzen die Folge durch die rekursive Regel

$$s_{n+1} := \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$$

fort.

Berechnen Sie $\sqrt{2}$ nach dieser Methode, aber unter Beachtung der folgenden Besonderheiten:

- Rechnen Sie im *Binärsystem*
- Die während der Berechnung auftretenden Binärbrüche dürfen Sie, ohne Rundung, nach der achten Stelle *hinter* dem Komma einfach abschneiden.
- Rechnen Sie so viele Schritte, bis Sie die Quadratwurzel, richtig gerundet, auf 6 binärstellen hinter dem Komma genau bestimmt haben.

---

### ▹ Antwort 8

$a = 2_{10} = 10_2$, $\frac{1}{2_{10}} = \frac{1}{10_2} = 0,1_2$

$$\begin{aligned}
n = 0 \qquad & \Rightarrow s_{0+1} = 1 \\
n = 1 \qquad & \Rightarrow s_{1+1} = 0,1 \cdot \left(1 + \frac{10}{1}\right) \\
& \qquad\quad = 0,1 \cdot 11 \\
& \qquad\quad = 1,1 \\
n = 2 \qquad & \Rightarrow s_{2+1} = 0,1 \cdot \left(1,1 + \frac{10}{1,1}\right) \\
& \qquad\quad = 0,1 \cdot (1,1 + 1,01010101) \\
& \qquad\quad = 1,01101010 \\
n = 3 \qquad & \Rightarrow s_{3+1} = 0,1 \cdot \left(1,01101010 + \frac{10}{1,01101010}\right) \\
& \qquad\quad = 0,1 \cdot (1,01101010 + 1,01101010) \\
& \qquad\quad = 1,01101010
\end{aligned}$$

### ▹ Frage 9

a) Stellen Sie für $b = 2$ (Binärsystem) und $b = 8$ (Oktalsystem) die Dezimalzahlen $x = 13$, $y = -11$ und $z = -6$ im $b$-Komplement mit $r = 5$ Stellen dar.

b) Führen Sie die Rechnungen $x + y$, $y + z$ und $z + z$ schriftlich im $b$-Komplement mit $b = 2$ und $b = 8$ durch und geben Sie das Ergebnis als Zahl mit Vorzeichen im Dezimalsystem an.

c) Stellen Sie die Zahlen $x$, $y$ und $z$ im »Exzess 16« System dar und bilden Sie die Summen $x + y$, $y + z$ und $z + z$ in diesem System.

---

### ▹ Antwort 9

a)

| | **b = 10** | **b = 2** o. V. | **b = 2 Kompl.** | **b = 8** o. V. | **b = 8 Kompl.** |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 13 | 1101 | **01101** | 0015 | **00015** |
| y | -11 | 1011 | **10101** | 0013 | **77765** |
| z | -6 | 0110 | **11010** | 0006 | **77772** |

b)

$x + y$ $\quad b = 2$

$$\begin{array}{r c r}
01101 & = & 13 \\
+10101 & = & -11 \\
\hline
\cancel{1}00010 & = & 2
\end{array}
\qquad b = 8 \qquad
\begin{array}{r c r}
00015 & = & 13 \\
+77765 & = & -11 \\
\hline
\cancel{1}00002 & = & 2
\end{array}$$

$y + z$ $\quad b = 2$

$$\begin{array}{r c r}
10101 & = & -11 \\
+11010 & = & -6 \\
\hline
\cancel{1}01111 & \neq & -17
\end{array}
\qquad b = 8 \qquad
\begin{array}{r c r}
77765 & = & -11 \\
+77772 & = & -6 \\
\hline
\cancel{1}77757 & = & -17
\end{array}$$

Überlauf, da das Vorzeichen vom Ergebnis ungleich dem Vorzeichen beider Summanden ist

$z + z$ $\quad b = 2$

$$\begin{array}{r c r}
11010 & = & -6 \\
11010 & = & -6 \\
\hline
\cancel{1}10100 & = & -12
\end{array}
\qquad b = 8 \qquad
\begin{array}{r c r}
77772 & = & -6 \\
77772 & = & -6 \\
\hline
\cancel{1}77764 & = & -12
\end{array}$$

c)

| | $b = 10$ | $b = 2$ o. V. | $b = 2$ und Exzess 16 |
|---|---|---|---|
| $x$ | 13 | 1101 | **11101** |
| $y$ | −11 | 1011 | **00101** |
| $z$ | −6 | 0110 | **01010** |

$x + y$

$$\begin{array}{r}
11101 \\
+00101 \\
\hline
\cancel{1}00010
\end{array}
\Rightarrow 10010 \quad \Rightarrow 2_{10}$$

$y + z$

$$\begin{array}{r}
00101 \\
+01010 \\
\hline
01111
\end{array}
\Rightarrow 11111 \quad \Rightarrow \text{Überlauf}$$

$z + z$

$$\begin{array}{r}
01010 \\
+01010 \\
\hline
10100
\end{array}
\Rightarrow 00100 \quad \Rightarrow -12_{10}$$

### ▹ Frage 10

a) Stellen Sie die Zahlen $x = 5$, $y = 1/4$ und $z = -1{,}7$ als normalisierte Gleitkommazahlen mit $b = 10$ und $b = 2$ (Binärsystem) dar. Dabei sollen Mantisse und Exponent einfach als Zahlen zur jeweiligen Basis mit Vorzeichen dargestellt werden, d. h. sie müssen nicht »rechnergerecht« in einem bestimmten Gleitkommasystem für Computer geschrieben werden, insbesondere in diesem Teil der Aufgabe auch nicht konform zu den IEEE Standards. Binärmantissen, die keine endliche Länge haben, dürfen anch der zehnten Nachkommastelle abgeschnitten werden.

b) Geben Sie die jeweilige Repräsentation der obigen Zahlen als Bitfolge gemäß der IEEE Standardform einfacher Genauigkeit an.

---

### ▹ Antwort 10

a)

| | | $b = 10$ | | | | $b = 2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | VZ | Man. | Exp. | Entspricht | VZ | Man. | Exp. | Entspricht |
| x | 5 | + | 5 | 1 | $0{,}5 \cdot 10^1$ | + | 01 | 2 | $1{,}01 \cdot 2^2$ |
| y | 0,25 | + | 25 | 0 | $0{,}25 \cdot 10^0$ | + | 0 | -2 | $1{,}0 \cdot 2^{-2}$ |
| z | -1,7 | − | 17 | 1 | $-0.17 \cdot 10^1$ | − | 1011001100 | 0 | $1{,}1011001100 \cdot 2^0$ |

b)

$$x = 5 \quad \Rightarrow \mathrm{VZ} = 0; \mathrm{Exp} = 129_{10} = 10000001$$
$$\Rightarrow \underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$\Rightarrow$ IEEE-Darstellung: **40A00000**

$$y = 0{,}25 \quad \Rightarrow \mathrm{VZ} = 0; \mathrm{Exp} = 125_{10} = 01111101$$
$$\Rightarrow \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$\Rightarrow$ IEEE-Darstellung: **3E800000**

$$z = -1{,}7 \quad \Rightarrow \mathrm{VZ} = 1; \mathrm{Exp} = 127_{10} = 01111111$$
$$\Rightarrow \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{1101}_{D}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{1010}_{A}$$
$\Rightarrow$ IEEE-Darstellung: **BFD9999A**

### ▹ Frage 11

Verwandeln Sie folgende IEEE Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit (geschrieben als achtziffrige Hexadezimalzahlen) in Dezimalzahlen. Sehr große oder sehr kleine Zahlen dürfen Sie auch in der »wissenschaftlichen« Notation mit Zweierpotenzen schreiben.

a) 42E48000
b) 3F880000
c) 00800000
d) C7f00000

---

### ▹ Antwort 11

a)

$$42E48000 = \underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$$\mathrm{VZ} = 0 \mathrel{\hat{=}} +$$
$$\mathrm{Exp} = 10000101_2 = 133_{10} \Rightarrow 133 - 127 = 6 \Rightarrow 2^6$$
$$\mathrm{Man.} = 1,11001001_2 = 1,78515625_{10}$$
$$\Rightarrow \qquad 42E48000_{\mathrm{IEEE}} = \mathbf{+114,25_{10}}$$

b)

$$3F880000 = \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$$\mathrm{VZ} = 0 \mathrel{\hat{=}} +$$
$$\mathrm{Exp.} = 01111111_2 = 127_{10} \Rightarrow 127 - 127 = 0 \Rightarrow 2^0$$
$$\mathrm{Man.} = 1,0001_2 = 1,0625_{10}$$
$$\Rightarrow \qquad 3F880000_{\mathrm{IEEE}} = \mathbf{+1,0625_{10}}$$

c)

$$00800000 = \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$$\mathrm{VZ} = 0 \mathrel{\hat{=}} +$$
$$\mathrm{Exp.} = 00000001_2 = 1_{10} \Rightarrow -127 + 1 = -126 \Rightarrow 2^{-126}$$
$$\Rightarrow \qquad 00800000_{\mathrm{IEEE}} = \mathbf{+1,0 \cdot 2^{-126}} = \mathbf{+1,175494351 \cdot 10^{-38}}$$

d)

$$C7F00000 = \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}$$
$$\mathrm{VZ} = 1 \mathrel{\hat{=}} -$$
$$\mathrm{Exp.} = 10001111_2 = 143_{10} \Rightarrow 143 - 127 = 16 \Rightarrow 2^{16}$$
$$\Rightarrow \qquad C7F00000_{\mathrm{IEEE}} = \mathbf{-1.875 \cdot 2^16} = \mathbf{-122880}$$

### ▹ Frage 12

Betrachten Sie die mit acht hexadezimalen Ziffern geschriebenen IEEE Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit $a = 3EE00000$ und $b = 3D800000$.

a) Berechnen Sie die Summe $c := a + b$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.
b) Berechnen Sie die Differenz $d := b - a$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.
c) Berechnen Sie das Produkt $p := b \cdot a$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.
d) Berechnen Sie den Quotienten $q := a/b$ als IEEE Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit.

Schreiben Sie das Ergebnis jeweils als Zahl mit 8 Hexadezimalziffern.

---

### ▹ Antwort 12

$$
\begin{aligned}
a = 3EE00000_{\text{IEEE}} \quad &\Rightarrow \quad \text{VZ} = 0 \mathrel{\hat{=}} + \\
&\phantom{\Rightarrow} \quad \text{Exp.} = 01111101_2 = 125_{10} \mathrel{\hat{=}} 2^{-2} \\
&\phantom{\Rightarrow} \quad \text{Man.} = 1,11 \\
b = 3D800000_{\text{IEEE}} \quad &\Rightarrow \quad \text{VZ} = 0 \mathrel{\hat{=}} + \\
&\phantom{\Rightarrow} \quad \text{Exp.} = 01111011_2 = 123_{10} \mathrel{\hat{=}} 2^{-4} \\
&\phantom{\Rightarrow} \quad \text{Man.} = 1,0
\end{aligned}
$$

a) $c := a + b$

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 1,11 \cdot 2^{-2} & & & \\
+ & 0,01 \cdot 2^{-2} & & & \\
\hline
 & 10,00 \cdot 2^{-2} & = & 1,0 \cdot 2^{-1} & \Rightarrow \mathbf{c = 3F00000}
\end{array}
$$

b) $d := b - a$

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 0,01 \cdot 2^{-2} & & & \\
- & 1,11 \cdot 2^{-2} & & & \\
\hline
- & 0,0110 \cdot 2^{0} & = & 1,1 \cdot 2^{-2} & \Rightarrow \mathbf{d = BEC00000}
\end{array}
$$

c) $p := a \cdot b$

$$0{,}01 \cdot 1,11$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 0\,01 \\
+ & \phantom{0}001 \\
+ & \phantom{00}001 \\
\hline
 & 0{,}0111 \quad \Rightarrow 0,0111 \cdot 2^{-4} = 1,11 \cdot 2^{-6} \Rightarrow \mathbf{p = 3CE00000}
\end{array}
$$

d) $q := a/b$

$$1,11 : 0,01 = 1,11 \cdot 2^2 \Rightarrow \mathbf{q = 40E00000}$$

### Liste der Versionen

| Version | Datum | Bearbeiter | Bemerkung |
|---|---|---|---|
| 1.0 | 04.02.2007 | Krä | Dokumenterstellung |
| 1.1 | 11.02.2007 | Krä | Frage 9 – 12 hinzugefügt |