Mathematik – Übungsaufgaben
Potenzreihen

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

13.04.2007
Version: 1.0

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Übungsaufgaben

1. Taylor-Reihen

▹ Frage 1.1

Ordnen Sie die Funktion $f(x) = 3\left(x^2+1\right)^2 - 2\,(2-x)^3 + (x+1)^4$ nach Potenzen von x, indem Sie diese in eine Taylor-Reihe entwickeln!

▹ Frage 1.2

Entwicklen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ in eine Taylor-Reihe und geben Sie jeweils die ersten vier Glieder an:

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(t) = \sin(\omega t + \pi)$

c) $f(x) = (1+x)^5$

▹ Frage 1.3

Durch welche Reihen lassen sich die Werte von e und π mit beliebiger Genauigkeit berechnen?[1]

[1] Lösungshinweis: Entnehmen Sie einer Formelsammlung die Reihenentwicklungen der Funktionen $f(x) = e^x$ bzw. $f(x) = \arctan x$ und setzen darin jeweils den Wert $x = 1$ ein!

Teil II
Lösungsvorschläge zu den Fragen

▹ Frage 1.1

Ordnen Sie die Funktion $f(x) = 3\left(x^2+1\right)^2 - 2(2-x)^3 + (x+1)^4$ nach Potenzen von x, indem Sie diese in eine Taylor-Reihe entwickeln!

▹ Antwort 1.1

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\quad}rcl}
f(x) & = & 3\left(x^2+1\right)^2 - 2(2-x)^3 + (x+1)^4 & f(0) & = & -12 & \Rightarrow a_0 & = & -12 \\
f'(x) & = & 12\left(x^3+x\right)^2 + 6(2-x)^2 + 4(x+1)^3 & f'(0) & = & 28 & \Rightarrow a_1 & = & 28 \\
f''(x) & = & 36x^2 - 12 + 12x + (x+1)^2 & f''(0) & = & 0 & \Rightarrow a_2 & = & 0 \\
f'''(x) & = & 96x + 36 & f'''(0) & = & 36 & \Rightarrow a_3 & = & 6 \\
f''''(x) & = & 96 & f''''(0) & = & 96 & \Rightarrow a_4 & = & 4
\end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = -12 + 28x + 6x^3 + 4x^4$$

Anmerkung: Taylorreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

▹ Frage 1.2

Entwicklen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ in eine Taylor-Reihe und geben Sie jeweils die ersten vier Glieder an:

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(t) = \sin(\omega t + \pi)$

c) $f(x) = (1+x)^5$

▹ Antwort 1.2

a)

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
f(x) & = & \sqrt{1+x} & f(0) & = & \sqrt{1+0} = 1 & \Rightarrow a_0 & = & 1 \\
f'(x) & = & \frac{1}{2}(1+x)^{0,5} & f'(0) & = & \frac{1}{2}(1+0)^{0,5} = \frac{1}{2} & \Rightarrow a_1 & = & \frac{1}{2} \\
f''(x) & = & -\frac{1}{4}(1+x)^{1,5} & f''(0) & = & \frac{1}{4}(1+0)^{1,5} = -\frac{1}{4} & \Rightarrow a_2 & = & -\frac{1}{8} \\
f'''(x) & = & \frac{3}{8}(1+x)^{2,5} & f'''(0) & = & \frac{3}{8}(1+0)^{2,5} = \frac{3}{8} & \Rightarrow a_3 & = & \frac{1}{16}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

b)

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin(\omega t + \pi) & f(0) &= \sin(\omega 0 + \pi) = 0 & \Rightarrow a_0 &= 0 \\
f'(t) &= -\cos(\omega t)\cdot\omega & f'(0) &= -\cos(\omega\cdot 0)\cdot\omega = -\omega & \Rightarrow a_1 &= -\omega \\
f''(t) &= \sin(\omega t)\cdot\omega^2 & f''(0) &= \sin(\omega\cdot 0)\cdot\omega^2 = 0 & \Rightarrow a_2 &= 0 \\
f'''(t) &= \cos(\omega t)\cdot\omega^3 & f'''(0) &= \cos(\omega\cdot 0)\cdot\omega^3 = \omega^3 & \Rightarrow a_3 &= \tfrac{1}{6}\omega^3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t + \pi) \approx -\omega t + \frac{1}{6}\omega^3 t^3$$

c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^5 & f(0) &= (1+0)^5 = 1 & \Rightarrow a_0 &= 1 \\
f'(x) &= 5(1+x)^4 & f'(0) &= 5(1+0)^4 = 5 & \Rightarrow a_1 &= 5 \\
f''(x) &= 20(1+x)^3 & f''(0) &= 20(1+0)^3 = 20 & \Rightarrow a_2 &= \tfrac{20}{2} = 10 \\
f'''(x) &= 60(1+x)^2 & f'''(0) &= 60(1+0)^2 = 60 & \Rightarrow a_3 &= \tfrac{60}{6} = 10
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+x)^5 \approx 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3$$

▹ Frage 1.3

Durch welche Reihen lassen sich die Werte von e und π mit beliebiger Genauigkeit berechnen?[1]

▹ Antwort 1.3

a) Für e gilt die Reihenentwicklung:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

n	0	1	2	3	4	5	7	10
$e(n)$	1,000	2,000	2,500	2,667	2,708	2,717	2,718	2,718

b) Für π kann über $\arctan x$ die folgende Reihenentwicklung verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\
\frac{\pi}{4} &= \arctan 1 \\
\pi &= 4 \arctan 1 \\
\pi &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\
\pi &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

n	0	5	10	20	40	80	160	2000
$\pi(n)$	4,000	2,976	3,232	3,189	3,166	3,154	3.148	3.142

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
1.0	13.04.2007	Krä	Dokumenterstellung

[1]Lösungshinweis: Entnehmen Sie einer Formelsammlung die Reihenentwicklungen der Funktionen $f(x) = e^x$ bzw. $f(x) = \arctan x$ und setzen darin jeweils den Wert $x = 1$ ein!