Mathematik – Übungsaufgaben
Komplexe Zahlen

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

13.04.2007
Version: 1.0

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Übungsaufgaben

1. Komplexe Zahlen

▹ Frage 1.1

Berechnen Sie i^n für $n = 2, 3, 4, \ldots, 9$!

▹ Frage 1.2

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + bi$ dar:

a) $-\frac{1}{i} + 1$

b) $\left(i^9 - i^1 4\right)^2$

c) $i^2 - \frac{1}{i^3}$

d) $\left(i + \frac{1}{i}\right)^2$

▹ Frage 1.3

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $6i \cdot 2i$

b) $\sqrt{2}i \cdot \left(1 - \sqrt{2}i\right)$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 - i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 - i)$

d) $(3 + 4i)(2 - i)$

▹ Frage 1.4

Stellen Sie die folgenden Summen bzw. Differenzen in der Zahlenebene durch eine Vektorkette dar (Die Subtraktion von z entspricht die Addition von $-z$):

a) $(2 + 3i) + (1 + 2i)$

b) $(1 + 2i) + (2 + i) + (1 - i)$

▹ Frage 1.5

Gegeben sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$. Berechnen Sie:

a) die Summe $z_1 + z_2$

b) die Differenz $z_1 - z_2$

c) das Produkt $z_1 \cdot z_2$

d) den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$

▹ Frage 1.6

Berechnen Sie für die Zahlen $z_1 = -3 + 4i$ und $z_2 = 1,2 + 0,9i$ folgende Beträge:

a) $|z_1|$
b) $|z_2|$
c) $|z_1 + z_2|$
d) $|z_1 \cdot z_2|$

▹ Frage 1.7

In der Gleichung $z^2 + 2i \cdot z + b = 0$ soll b eine von Null verschiedene reelle Zahl sein. Welche Bedingung muß b erfüllen, um rein imaginäre Lösungen für z zu erhalten? Wie lauten die Lösungen?

▹ Frage 1.8

Geben Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

a) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3 - 3i = 0$
b) $16x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2i + 9 = 0$

▹ Frage 1.9

Beweisen Sie für $z = x + yi$ bzw. $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ sowie $a > 0$:

a) $|az| = a|z|$
b) $|z| = |-z|$
c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
d) $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$

▹ Frage 1.10

Die folgenden Zahlen $x + yi$ sollen Quadrate von komplexen Grundzahlen $a + bi$ sein:

a) $2i$
b) $3 - 4i$
c) $-3 + 4i$
d) $-20 + 20i$

Bestimmen Sie jeweils a und b und entscheiden Sie, ob die Lösung eindeutig ist![1]

▹ Frage 1.11

Berechnen Sie für die folgenden Vektorpaare z_1, z_2 den Winkel γ, um den man z_1 im positiven Sinne drehen muß, damit seine Richtung mit der von z_2 übereinstimmt:

a) $z_1 = i;\ z_2 = 1 + i$
b) $z_1 = 3 + 4i;\ z_2 = -4 + 3i$

▹ Frage 1.12

Berechnen Sie

a) $\sqrt[4]{1}$
b) $\sqrt[3]{27}$

[1] Lösungsweg: Der Ansatz $(a + bi)^2 = x + yi$ kann so umgeformt werden, daß die linke Seite der Gleichung die Form $a' + b'i$ annimmt; die auf diese Weise entstehende Gleichung ist äquivalent zu zwei Gleichungen mit reellen Zahlen.

c) $\sqrt[4]{i}$

d) $\sqrt[5]{-2}$

▹ Frage 1.13

Berechnen Sie alle Werte von:

a) $\sqrt{-5+12i}$

b) $\sqrt[4]{\cos 60^o + i \sin 60^o}$

c) $\sqrt[5]{8-6i}$

▹ Frage 1.14

Leiten Sie aus der Formel von Moivre (für $n = 3$) folgende Zusammenhänge ab:

a) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}\right)$

b) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}\right)$

c) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} + 2 = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$

Teil II
Lösungsvorschläge zu den Fragen

▹ **Frage 1.1**

Berechnen Sie i^n für $n = 2, 3, 4, \dots, 9$!

▹ **Antwort 1.1**

n	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	-1	$-i$	1	$-i$	-1	$-i$	1	$-i$

▹ **Frage 1.2**

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + bi$ dar:

a) $-\frac{1}{i} + 1$

b) $\left(i^9 - i^1 4\right)^2$

c) $i^2 - \frac{1}{i^3}$

d) $\left(i + \frac{1}{i}\right)^2$

▹ **Antwort 1.2**

a)

$$-\frac{1}{i} + 1 = 1 + i$$

b)

$$\left(i^9 - i^1 4\right)^2 = (-i + 1)^2 = 2i$$

c)

$$i^2 - \frac{1}{i^3} = -1 - i$$

d)

$$\left(i + \frac{1}{i}\right)^2 = (i - i)^2 = 0$$

▹ Frage 1.3

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $6i \cdot 2i$

b) $\sqrt{2}i \cdot \left(1 - \sqrt{2}i\right)$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1-i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1-i)$

d) $(3+4i)(2-i)$

▹ Antwort 1.3

a)

$$6i \cdot 2i = -12$$

b)

$$\sqrt{2}i \cdot \left(1 - \sqrt{2}i\right) = \sqrt{2}i - 2i^2 = 2 + \sqrt{2}i$$

c)

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1-i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1-i) = \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(1-2i-1) = -i$$

d)

$$(3+4i)(2-i) = 6 - 3i + 8i - 4i^2 = 10 + 5i$$

▹ Frage 1.4

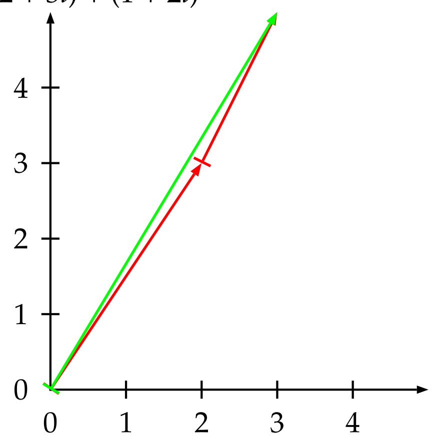
Stellen Sie die folgenden Summen bzw. Differenzen in der Zahlenebene durch eine Vektorkette dar (Die Subtraktion von z entspricht die Addition von $-z$):

a) $(2+3i)+(1+2i)$

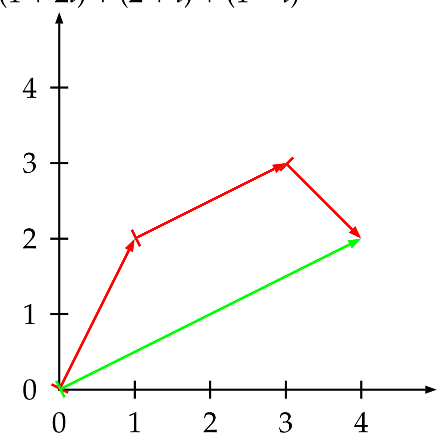
b) $(1+2i)+(2+i)+(1-i)$

▹ Antwort 1.4

$(2+3i)+(1+2i)$



$(1+2i)+(2+i)+(1-i)$



▹ Frage 1.5

Gegeben sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$. Berechnen Sie:

a) die Summe $z_1 + z_2$

b) die Differenz $z_1 - z_2$

c) das Produkt $z_1 \cdot z_2$

d) den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$

▹ Antwort 1.5

a)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$

▹ Frage 1.6

Berechnen Sie für die Zahlen $z_1 = -3 + 4i$ und $z_2 = 1,2 + 0,9i$ folgende Beträge:

a) $|z_1|$

b) $|z_2|$

c) $|z_1 + z_2|$

d) $|z_1 \cdot z_2|$

▹ Antwort 1.6

a)

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

b)

$$|z_2| = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

c)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |-3 + 4i + 1,2 + 0,9i| = |-1,8 + 4,9i| \\ &= \sqrt{(-1,8)^2 + 4,9^2} = \sqrt{27,25} \approx 5,22 \end{aligned}$$

d)

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(-7,2)^2 + 2,1^2} = \sqrt{56,25} = 7\frac{1}{2}$$

▹ Frage 1.7

In der Gleichung $z^2 + 2i \cdot z + b = 0$ soll b eine von Null verschiedene reelle Zahl sein. Welche Bedingung muß b erfüllen, um rein imaginäre Lösungen für z zu erhalten? Wie lauten die Lösungen?

▹ Antwort 1.7

$$\begin{aligned} z^2 + 2iz + b &= 0 \\ z_{1,2} &= -\frac{2i}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i)^2}{4} - b} \\ z_{1,2} &= -i \pm \sqrt{-1 - b} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ rein imaginäre Lösungen erhält man für $b \in \mathbb{R} \wedge b \in [-1, \infty]$.

▹ Frage 1.8

Geben Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

a) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3 - 3i = 0$

b) $16x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2i + 9 = 0$

▹ Antwort 1.8

a)

$$\begin{aligned} x^2 + (3 - 2i)\,x + 3 - 3i &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{3 - 2i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3 - 2i)^2}{4} - (3 - 3i)} \\ &= -\frac{3}{2} + i \pm \sqrt{\frac{9 - 4i - 4}{4} - 3 + 3i} \\ &= -\frac{3}{2} + i \pm \sqrt{\frac{5 - 4i - 12 + 12i}{4}} \\ &= -\frac{3}{2} + i \pm \sqrt{\frac{7}{4} + 2i} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
16x^2 + 8(i+1)x + 2i + 9 &= 0\\
x^2 + \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{8}i + \frac{9}{16} &= 0\\
x_{1,2} &= -\frac{\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)^2}{4} - \left(\frac{1}{8}i + \frac{9}{16}\right)}\\
&= -i + 1 \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}}{4} - \frac{1}{8}i - \frac{9}{16}}\\
&= -i + 1 \pm \sqrt{2i - \frac{1}{8}i - \frac{9}{16}}\\
&= 1 - i \pm \sqrt{\frac{15}{8}i - \frac{9}{16}}\\
&\Rightarrow\ x_1 = -\frac{1}{4} - i \qquad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

▹ Frage 1.9

Beweisen Sie für $z = x + yi$ bzw. $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ sowie $a > 0$:

a) $|az| = a|z|$

b) $|z| = |-z|$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

d) $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$

▹ Antwort 1.9

a)

$$
\begin{aligned}
|az| &= a|z|\\
\left|ax + ayi\right| &= a\left|x + yi\right|\\
\sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} &= a\sqrt{x^2 + y^2}\\
(ax)^2 + (ay)^2 &= a^2\left(x^2 + y^2\right)\\
(ax)^2 + (ay)^2 &= (ax)^2 + (ay)^2\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
|z| &= |-z|\\
\left|x + yi\right| &= \left|-x - yi\right|\\
\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2}\\
\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + y^2}\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\left|(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)\right| &= \left|x_1 + y_1 i\right|\left|x_2 + y_2 i\right| \\
\left|x_1x_2 + x_1y_2 i + x_2y_1 i - y_1y_2\right| &= \left|x_1 + y_1 i\right|\left|x_2 + y_2 i\right| \\
\sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 &= \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) \\
x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 &= \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) \\
\left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) &= \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
\left|\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right| &= \frac{\left|x_1 + y_1 i\right|}{\left|x_2 + y_2 i\right|} \\
\left|\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i\right| &= \frac{\left|x_1 + y_1 i\right|}{\left|x_2 + y_2 i\right|} \\
\sqrt{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\
\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2} \\
\frac{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)^2}{x_2^2 + y_2^2} &= x_1^2 + y_1^2 \\
\frac{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} &= x_1^2 + y_1^2 \\
x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

▹ Frage 1.10

Die folgenden Zahlen $x + yi$ sollen Quadrate von komplexen Grundzahlen $a + bi$ sein:

a) $2i$

b) $3 - 4i$

c) $-3 + 4i$

d) $-20 + 20i$

Bestimmen Sie jeweils a und b und entscheiden Sie, ob die Lösung eindeutig ist![1]

▹ Antwort 1.10

[1] Lösungsweg: Der Ansatz $(a + bi)^2 = x + yi$ kann so umgeformt werden, daß die linke Seite der Gleichung die Form $a' + b'i$ annimmt; die auf diese Weise entstehende Gleichung ist äquivalent zu zwei Gleichungen mit reellen Zahlen.

a) $\Rightarrow a = 1 \wedge b = 1 \vee a = -1 \wedge b = -1$

b) $\Rightarrow a = -2 \wedge b = 1 \vee a = 2 \wedge b = -1$

c) $\Rightarrow a = 1 \wedge b = 2 \vee a = -1 \wedge b = -2$

d) $\Rightarrow a = \sqrt{\frac{10}{1+\sqrt{2}}} \wedge b = \sqrt{10\left(1+\sqrt{2}\right)} \vee a = -\sqrt{\frac{10}{1+\sqrt{2}}} \wedge b = -\sqrt{10\left(1+\sqrt{2}\right)}$

Ansatz: $x + yi = (a+bi)^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{x} + \underbrace{2abi}_{y}$

Beispiel für a):

$$\begin{aligned} 2i &= (a+bi)^2 \\ \Rightarrow &\quad x = 0; y = 2i \\ a^2 - b^2 &= 0 \\ \Rightarrow a &= b \\ 2ab &= 2 \\ \Rightarrow ab &= 1 \\ \Rightarrow &\quad a = 1 \wedge b = 1 \vee a = -1 \wedge b = -1 \end{aligned}$$

▹ Frage 1.11

Berechnen Sie für die folgenden Vektorpaare z_1, z_2 den Winkel γ, um den man z_1 im positiven Sinne drehen muß, damit seine Richtung mit der von z_2 übereinstimmt:

a) $z_1 = i; z_2 = 1 + i$

b) $z_1 = 3 + 4i; z_2 = -4 + 3i$

▹ Antwort 1.11

a)

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= \sqrt{0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \cos \sphericalangle(z_1, z_2) \\ 1 &= \sqrt{2} \cos \sphericalangle(z_1, z_2) \\ \sphericalangle(z_1, z_2) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -45^o \\ \Rightarrow \sphericalangle(z_1, z_2) &= 315^o \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 &= \sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cos \sphericalangle(z_1, z_2) \\ 0 &= 25 \cos \sphericalangle(z_1, z_2) \\ \sphericalangle(z_1, z_2) &= \arccos 0 \\ \Rightarrow \sphericalangle(z_1, z_2) &= 90^0 \end{aligned}$$

▹ Frage 1.12

Berechnen Sie

a) $\sqrt[4]{1}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[4]{i}$

d) $\sqrt[5]{-2}$

▹ Antwort 1.12

Allgemein:

$$\begin{aligned} z_n &= |a|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \\ &= |a|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{1} \\ z_0 &= 1 \cdot e^{i\left(\frac{0}{4}\right)} = e^{i\cdot 0} = 1 \\ z_1 &= 1 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= -i \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{27} \\ z_0 &= 3 \\ z_1 &= -\frac{3}{2} + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \\ z_2 &= -\frac{3}{2} - i\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{i} \qquad |i|^{\frac{1}{n}} = 1; n = 4; \alpha = 90^o = \frac{\pi}{2} \\ z_0 &= e^{i\frac{1}{8}\pi} = 0,92 + 0,38i \\ z_1 &= e^{i\frac{5}{8}\pi} = -0,92 - 0,38i \\ z_2 &= e^{i\frac{9}{8}\pi} = -0,38 + 0,92i \\ z_3 &= e^{i\frac{13}{8}\pi} = 0,38 - 0,92i \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[5]{-2} \qquad |-2|^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}; n = 5; \alpha = 180^o = \pi \\ z_0 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{1}{5}\pi} \\ z_1 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi} \\ z_2 &= \sqrt[5]{3}e^{i\pi} \\ z_3 &= \sqrt[5]{3}e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_4 &= \sqrt[5]{3}e^{i\frac{9}{5}\pi} \end{aligned}$$

▹ Frage 1.13

Berechnen Sie alle Werte von:

a) $\sqrt{-5+12i}$

b) $\sqrt[4]{\cos 60^o + i\sin 60^o}$

c) $\sqrt[5]{8-6i}$

▹ Antwort 1.13

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{-5+12i} \quad &\Longrightarrow \quad |a| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = 13; n = 2 \\ &\qquad \tan\alpha = \frac{\Im}{\Re} = \frac{12}{-5} \Rightarrow \alpha = 112,6^o = 0,63\pi \\ z_0 &= \sqrt{13}\, e^{0,31\pi i} \\ z_1 &= \sqrt{13}\, e^{1,31\pi i} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\cos 60^o + i \sin 60^o} \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = 60^o; |a| = 1; n = 4 \\ z_0 &= e^{\frac{1}{12}\pi i} \\ z_1 &= e^{\frac{7}{12}\pi i} \\ z_2 &= e^{\frac{13}{12}\pi i} \\ z_3 &= e^{\frac{19}{12}\pi i} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{8-6i} \quad &\Longrightarrow \quad |a| = 10; n = 5; \alpha = 323,13^o \\ z_0 &= \sqrt[5]{10}\, e^{i\cdot 64,6^o} \\ z_1 &= \sqrt[5]{10}\, e^{i\cdot 136,6^o} \\ z_2 &= \sqrt[5]{10}\, e^{i\cdot 208,6^o} \\ z_3 &= \sqrt[5]{10}\, e^{i\cdot 280,6^o} \\ z_4 &= \sqrt[5]{10}\, e^{i\cdot 352,6^o} \end{aligned}$$

▹ Frage 1.14

Leiten Sie aus der Formel von Moivre (für $n = 3$) folgende Zusammenhänge ab:

a) $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)$

b) $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)$

c) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + 2 = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

▹ Antwort 1.14

a)

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot i\sin x + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + i3\cos^2 x \sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ \Rightarrow \cos(3x) &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \qquad |: \cos x \\ \frac{\cos(3x)}{\cos x} &= \cos^2 x - 3\sin^2 x \\ &= 1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x \\ &= 1 - 4\sin^2 x \\ 4\sin^2 x &= 1 - \frac{\cos(3x)}{\cos x} \\ \sin^2 x &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\cos(3x)}{\cos x}\right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + i\sin(3x) &= (\cos x + i\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot i\sin x + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + i3\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
\Rightarrow \sin(3x) &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \qquad |: \sin x \\
\frac{\sin(3x)}{\sin x} &= 3\cos^2 x - \sin^2 x \qquad |\ \cos^2 = 1 - \sin^2 \\
&= 3 - 3\sin^2 x - \sin^2 x \\
&= 3 - 4\sin^2 x \\
4\sin^2 x &= 3 - \frac{\sin(3x)}{\sin x} \\
\sin^2 x &= \frac{1}{4}\left(3 - \frac{\sin(3x)}{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right) &= \frac{1}{4}\left(3 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right) \\
1 - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} &= 3 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \\
-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} &= 2 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \\
\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + 2 &= \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
1.0	13.04.2007	Krä	Dokumenterstellung