

Mathematik – Übungsaufgaben

Grundlagen

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>
Homepage: <www.SemiByte.de>

14.04.2007
Version: 1.0

Inhaltsverzeichnis

I	Übungsaufgaben	2
1.	Rechenregeln	2
	Frage 1.1	2
	Frage 1.2	2
	Frage 1.3	2
	Frage 1.4	2
	Frage 1.5	2
	Frage 1.6	2
	Frage 1.7	2
2.	Gleichungssysteme	3
	Frage 2.1	3
	Frage 2.2	3
	Frage 2.3	3
	Frage 2.4	3
	Frage 2.5	3
3.	Winkelfunktionen, Geometrie	3
	Frage 3.1	3
	Frage 3.2	3
	Frage 3.3	3
	Frage 3.4	3
	Frage 3.5	4
	Frage 3.6	4
II	Lösungsvorschläge zu den Fragen	5

Teil I

Übungsaufgaben

1. Rechenregeln

► **Frage 1.1**

Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{6^6}$ b) $16^{\frac{1}{4}}$ c) $16^{-\frac{1}{4}}$ d) 3^{-3} e) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}}$

► **Frage 1.2**

Formen Sie $\frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}$ so um, daß Zähler und Nenner keine Brüche mehr enthalten!

► **Frage 1.3**

Bringen Sie folgende Ausdrücke auf die einfachste Form:

a) $\frac{x^3 \cdot (4x)^2}{(2x)^4}$

b) $\frac{(n^{2\alpha})^3}{(n^6)^\alpha}$

► **Frage 1.4**

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

a) $\frac{a^2 - b^2}{b - a}$

b) $\frac{x^{2a} - x^a}{x^a + x^{2a}}$

► **Frage 1.5**

Der Durchmesser eines Protons beträgt ungefähr 10^{-15} m, seine Masse $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg. Berechnen Sie seine Dichte (in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)!

► **Frage 1.6**

In 4 g Helium befinden sich $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome. Wie groß ist die Masse eines Heliumatoms?

► **Frage 1.7**

Die Periode einer Kristallschwingung beträgt $2,5 \cdot 10^{-8}$ s. Berechnen Sie die Oszillationsfrequenz (in Schwingungen pro Sekunde)!

2. Gleichungssysteme

► Frage 2.1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2r^2 + 8r = 64$

b) $p \frac{6p+7}{3p+\frac{7}{3}} = 10$

► Frage 2.2

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x + y &= -2 \\ x - y &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 12x - 10y &= 5 \\ 8x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 23 \\ 9x - 15y &= 14 \end{aligned}$$

► Frage 2.3

Bei der Bewegung eines Elektrons um den Atomkern gelten die Beziehungen $W = \frac{1}{2}mv^2 + W_p$; $W_p = -\frac{e^2}{R}$; $\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2}$. Leiten Sie hieraus einen Zusammenhang für W ab, der nur von e und R abhängt!

► Frage 2.4

Für die relativistische Änderung der Masse gilt die Formel $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. Bei welchem Wert von $\frac{v}{c}$ ist $m = 2m_0$? Lösen Sie die Gleichung nach v auf!

► Frage 2.5

Gegeben sind die folgenden Ausdrücke: $x' = \frac{x + \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $ct' = \frac{ct + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Hiermit lassen sich die Koordinaten x' und ct' aus den Koordinaten x und ct berechnen. Formen Sie die Gleichungen so um, daß umgekehrt die Koordinaten x und ct durch x' und ct' ausgedrückt werden können!

3. Winkelfunktionen, Geometrie

► Frage 3.1

Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ aus!

► Frage 3.2

Zeigen Sie, daß die Beziehung $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ gilt!

► Frage 3.3

Die Spitze eines 4 km entfernten Fernsehturms erscheint dem Beobachter unter einem Winkel von 3° . Bestimmen Sie seine Höhe exakt sowie mit Hilfe einer für kleine Winkel gültigen Näherung!

► Frage 3.4

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 5$ cm und der Höhe $h_c = 2$ cm. Konstruieren Sie dieses Dreieck mit Zirkel und Lineal! Wieviele nicht kongruente Lösungen gibt es?

► Frage 3.5

Gegeben sein ein Dreieck mit den Seiten $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = 60^\circ$. Berechnen Sie die Länge der Seite c sowie die Winkel α und β .

► Frage 3.6

Der Erdradius beträgt $R = 6370$ km. Welchen Raumwinkel spannt die Fläche der Bundesrepublik ($35,6 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$) vom Erdmittelpunkt aus gesehen auf?

Teil II

Lösungsvorschläge zu den Fragen

► **Frage 1.1**

Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{6^6}$ b) $16^{\frac{1}{4}}$ c) $16^{-\frac{1}{4}}$ d) 3^{-3} e) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}}$

► **Antwort 1.1**

a) $\sqrt[3]{6^6} = 6^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 6^2 = 36$

b) $16^{\frac{1}{4}} = 2$

c) $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}$

d) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1,122$

f) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1,122$

► **Frage 1.2**

Formen Sie $\frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}$ so um, daß Zähler und Nenner keine Brüche mehr enthalten!

► **Antwort 1.2**

$$\frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}} = \frac{1}{\frac{A+B}{AB}} = \frac{AB}{A+B}$$

► **Frage 1.3**

Bringen Sie folgende Ausdrücke auf die einfachste Form:

a) $\frac{x^3 \cdot (4x)^2}{(2x)^4}$

b) $\frac{(n^{2\alpha})^3}{(n^6)^\alpha}$

► **Antwort 1.3**

a) $\frac{x^3 \cdot (4x)^2}{(2x)^4} = \frac{x^3 \cdot 16x^2}{16x^4} = x$

b) $\frac{(n^{2\alpha})^3}{(n^6)^\alpha} = \frac{n^{6\alpha}}{n^{6\alpha}} = 1$

► **Frage 1.4**

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

- a) $\frac{a^2-b^2}{b-a}$
 b) $\frac{x^{2a}-x^a}{x^a+x^{2a}}$

► **Antwort 1.4**

- a) $\frac{a^2-b^2}{b-a} = \frac{(a-b)(a+b)}{-(a-b)} = -a - b$
 b) $\frac{x^{2a}-x^a}{x^a+x^{2a}} = \frac{x^a(x^a-1)}{x^a(1+x^a)} = \frac{x^a-1}{x^a+1}$

► **Frage 1.5**

Der Durchmesser eines Protons beträgt ungefähr 10^{-15} m, seine Masse $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg. Berechnen Sie seine Dichte (in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)!

► **Antwort 1.5**

geg.: $d = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-13} \text{ cm}$ $m = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

ges.: $\rho = ?$

Für das Volumen einer Kugel gilt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und, da der Durchmesser gegeben ist: $r = \frac{1}{2}d$. Die Dichte ρ lässt sich über $\rho = \frac{m}{V}$ berechnen.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3m}{4\pi \frac{d^3}{8}} = \frac{24m}{4\pi d^3} = \frac{6m}{\pi d^3} = 3,1 \cdot 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

► **Frage 1.6**

In 4 g Helium befinden sich $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome. Wie groß ist die Masse eines Heliumatoms?

► **Antwort 1.6**

geg.: $m_G = 4 \text{ g}$ $n = 6,02 \cdot 10^{23}$

ges.: $m_{\text{He}} = ?$

$$m_{\text{He}} = m_G \cdot n^{-1} = 6,64 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

► **Frage 1.7**

Die Periode einer Kristallschwingung beträgt $2,5 \cdot 10^{-8}$ s. Berechnen Sie die Oszillationsfrequenz (in Schwingungen pro Sekunde)!

► **Antwort 1.7**

geg.: $t = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

ges.: $f = ?$

$$f = \frac{1}{t} = 40.000.000 \frac{1}{s} = 40 \text{ MHz}$$

► **Frage 2.1**

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2r^2 + 8r = 64$

b) $p \frac{6p+7}{3p+\frac{7}{3}} = 10$

► **Antwort 2.1**

a)

$$2r^2 + 8r = 64$$

$$r^2 + 4r = 32$$

$$r^2 + 4r + 4 = 36$$

$$(r+2)^2 = 36$$

$$r+2 = \sqrt{36}$$

$$r = -2 \pm 6 \quad \Leftrightarrow r_1 = 4 ; r_2 = -8$$

b)

$$p \frac{6p+7}{3p+\frac{7}{3}} = 10$$

$$6p^2 + 7p = 30p + \frac{70}{3}$$

$$6p^2 - 23p = \frac{70}{3}$$

$$p^2 - \frac{23}{6}p - \frac{70}{24} = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{23}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{23}{6}\right)^2 - \frac{70}{24}}$$

$$p_{1,2} = \frac{23}{12} \pm \sqrt{\frac{109}{144}}$$

$$p_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{109}}{12} \quad \Leftrightarrow p_1 \approx 2,79 ; p_2 \approx 1,05$$

► **Frage 2.2**

Lösung Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a) $x + y = -2$
 $x - y = 8$

b) $12x - 10y = 5$
 $8x + 6y = 3$

c) $3x - 5y = 23$
 $9x - 15y = 14$

► **Antwort 2.2**

$$\begin{array}{r} \text{a) } x + y = -2 \\ x - y = 8 \\ \hline 2x = 6 \\ x = 3 \\ \hline x + y = -2 \\ 3 + y = -2 \\ y = -5 \end{array}$$

b)

$$\text{Det } D = \begin{vmatrix} 12 & -10 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 152$$

$$\text{Det } D_x = \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 60$$

$$\text{Det } D_y = \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 8 = -4$$

$$x = \frac{\text{Det } D_x}{\text{Det } D} = \frac{60}{152} = \frac{15}{38}$$

$$y = \frac{\text{Det } D_y}{\text{Det } D} = -\frac{4}{152} = -\frac{1}{38}$$

c)

$$\text{Det } D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -15 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) + 5 \cdot 9 = 0$$

⇒ keine Lösung, Geraden schneiden sich nicht

► **Frage 2.3**

Bei der Bewegung eines Elektrons um den Atomkern gelten die Beziehungen $W = \frac{1}{2}mv^2 + W_p$; $W_p = -\frac{e^2}{R}$; $\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2}$. Leiten Sie hieraus einen Zusammenhang für W ab, der nur von e und R abhängt!

► **Antwort 2.3**

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + W_p$$

$$W_p = -\frac{e^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + W_p \quad | \quad W_p = -\frac{e^2}{R} \text{ einsetzen}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{R} \quad | \quad \frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{R^2} \Leftrightarrow mv^2 = \frac{e^2}{R} \text{ einsetzen}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R}$$

$$W = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{R}$$

► **Frage 2.4**

Für die relativistische Änderung der Masse gilt die Formel $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. Bei welchem Wert von $\frac{v}{c}$ ist $m = 2m_0$? Lösen Sie die Gleichung nach v auf!

► **Antwort 2.4**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \frac{m_0}{m}$$

$$1 - (\frac{v}{c})^2 = (\frac{m_0}{m})^2$$

$$(\frac{v}{c})^2 = 1 - (\frac{m_0}{m})^2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2} \quad | m = 2m_0 \text{ einsetzen}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\frac{m_0}{2m_0})^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{v}{c} \approx 0,866$$

► **Frage 2.5**

Gegeben sind die folgenden Ausdrücke: $x' = \frac{x + \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $ct' = \frac{ct + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Hiermit lassen sich die Koordinaten x' und ct' aus den Koordinaten x und ct berechnen. Formen Sie die Gleichungen so um, daß umgekehrt die Koordinaten x und ct durch x' und ct' ausgedrückt werden können!

► **Antwort 2.5**

$$x' = \frac{x + \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad ct' = \frac{ct + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' \sqrt{1 - \beta^2} = x + \beta ct \qquad \xLeftrightarrow \text{einsetzen} \qquad ct' \sqrt{1 - \beta^2} = ct + \beta x$$

$$x = x' \sqrt{1 - \beta^2} - \beta ct \qquad ct = ct' \sqrt{1 - \beta^2} - \beta x$$

$$\begin{aligned}
 x &= x' \sqrt{1-\beta^2} - \beta ct' \sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 x & ct &= ct' \sqrt{1-\beta^2} - \beta x' \sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 ct \\
 x - \beta^2 x &= x' \sqrt{1-\beta^2} - \beta ct' \sqrt{1-\beta^2} & ct(1-\beta^2) &= (ct' - \beta x') \sqrt{1-\beta^2} \\
 x(1-\beta^2) &= x' \sqrt{1-\beta^2} - \beta ct' \sqrt{1-\beta^2} & ct &= \frac{ct' - \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
 &= \sqrt{1-\beta^2} (x' - \beta ct') \\
 x &= \frac{x' - \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}
 \end{aligned}$$

► **Frage 3.1**

Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ aus!

► **Antwort 3.1**

1. Möglichkeit (über Ersetzung von \sin und \cos durch \tan)

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} \frac{\tan \beta}{\sqrt{1+\tan^2 \beta}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha} \sqrt{1+\tan^2 \beta}} - \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha} \sqrt{1+\tan^2 \beta}}} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha} \sqrt{1+\tan^2 \beta} - \tan \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\cos \alpha \cos \beta \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)}{\cos \alpha \cos \beta \left(1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

► **Frage 3.2**

Zeigen Sie, daß die Beziehung $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ gilt!

▷ **Antwort 3.2**

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) && \Leftrightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x &= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x\end{aligned}$$

▷ **Frage 3.3**

Die Spitze eines 4 km entfernten Fernsehturms erscheint dem Beobachter unter einem Winkel von 3° . Bestimmen Sie seine Höhe exakt sowie mit Hilfe einer für kleine Winkel gültigen Näherung!

▷ **Antwort 3.3**

geg.: $s = 4 \text{ km} = 4000 \text{ m}$ $\varphi = 3^\circ$

ges.: $h = ?$

$$\begin{aligned}\tan \varphi &= \frac{h}{s} \\ h &= \tan \varphi \cdot s = \tan 3^\circ \cdot 4000 \text{ m} = 209,6 \text{ m}\end{aligned}$$

für kleine Winkel:

$$\left. \begin{aligned}\tan \alpha &\approx \alpha \\ \sin \alpha &\approx \alpha \\ \cos \alpha &\approx 1\end{aligned}\right\} \alpha \text{ in rad}$$

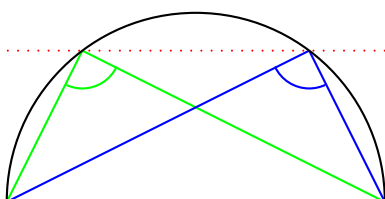
$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{h}{s} \\ h &= \varphi \cdot s = 4000 \text{ m} \cdot \frac{\pi}{60} \approx 209,4 \text{ m}\end{aligned}$$

▷ **Frage 3.4**

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 5 \text{ cm}$ und der Höhe $h_c = 2 \text{ cm}$. Konstruieren Sie dieses Dreieck mit Zirkel und Lineal! Wieviele nicht kongruente Lösungen gibt es?

▷ **Antwort 3.4**

2 Lösungen



► **Frage 3.5**

Gegeben sein ein Dreieck mit den Seiten $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = 60^\circ$. Berechnen Sie die Länge der Seite c sowie die Winkel α und β .

► **Antwort 3.5**

geg.: $a = 5 \text{ cm}$ $b = 4 \text{ cm}$ $\gamma = 60^\circ$

ges.: $c = ?$ $\alpha = ?$ $\beta = ?$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = 4,58 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{b^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma - a^2}{2b \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{b - a \cos \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}}\right) = 70,89^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - \arccos\left(\frac{b - a \cos \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}}\right) - \gamma = 49,11^\circ$$

► **Frage 3.6**

Der Erdradius beträgt $R = 6370 \text{ km}$. Welchen Raumwinkel spannt die Fläche der Bundesrepublik ($35,6 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$) vom Erdmittelpunkt aus gesehen auf?

► **Antwort 3.6**

geg.: $R = 6370 \text{ km} = 6370 \cdot 10^3 \text{ m}$ $S = 35,6 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$

ges.: $\Omega = ?$

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{35,6 \cdot 10^{10} \text{ m}^2}{(6370 \cdot 10^3 \text{ m})^2}$$

$$= 8,77 \cdot 10^{-3} \text{ st}$$

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
1.0	14.04.2007	Krä	Dokumenterstellung
