

# Integralrechnung

---

Tobias Brinkert  
eMail: <[t.brinkert@semibyte.de](mailto:t.brinkert@semibyte.de)>  
Homepage: <[www.semibyte.de](http://www.semibyte.de)>

21.05.2005  
Version: 1.1

Betrachtet man den Differentialquotienten  $f'(x) = dy(dx)^{-1}$ , so könnte man auch schreiben  $dy = f'(x) dx$ .

Man nimmt also die Ordinate auf der Kurve zur ersten Ableitung, »multipliziert« diese mit  $dx$  und erhält ein Flächenelement  $dy$ , das zur Kurve der Stammfunktion einen Ordinatenzuwachs darstellt. Daher könnte man Differenzieren als eine Methode der Anstiegsbestimmung und die aus  $dy = f'(x) dx$  folgende als Flächenbestimmung auffassen. Letztere nennt man Integration und schreibt

$$y = \int f(x) dx. \quad (1)$$

Da jedoch unbestimmt ist, wo man mit der Bestimmung unter der Fläche beginnt, schreibt man genauer

$$y = \int f(x) dx + C \quad (2)$$

und liest » $y$  gleich Integral über  $f$  von  $x dx$  plus Integrationskonstante  $C$ «. wenn die Fläche unter einer Kurve von einem festgelegtem Anfang  $x_1 = a$  bis zu einem oberen Wert  $x_2 = b$  bestimmt werden soll, schreibt man

$$y = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Hier entfällt die Integrationskonstante  $C$ , da die Fläche bestimmt ist.

Neue Formeln herzuleiten ist nicht notwendig, da die Integration als eine rückgängig gemachte Differentiation aufgefaßt werden kann:

$$\begin{aligned} y &= x^n \\ dy &= nx^{n-1} dx \\ \int dy &= \int nx^{n-1} dx + C \\ y &= x^n + C \end{aligned}$$

Danach wäre

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (4)$$

## Beispiel 1

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ \int x^3 dx &= \frac{1}{4} x^4 + C \\ \int_0^2 x^3 dx &= \frac{1}{4} 2^4 - \frac{1}{4} 0^4 = 0 \end{aligned}$$

Diese Regel versagt bei  $n = -1$ :

$$\int x^{-1} dx = 1 \cdot 0^{-1} x^0.$$

Obwohl die zu  $y = x^{-1}$  gehörende Kurve, die Hyperbel, einfach erscheint, kann ein Ausdruck für die Fläche unter der Hyperbel nicht gefunden werden.

Die Hyperbel schmiegt sich zusehenst der x-Achse an, also muß die Flächenzunahme immer langsamer erfolgen. Wenn die obere Grenze in

$$\int_1^a x^{-1} dx$$

so gewählt wird, daß die Fläche 1 ergibt, kommt man zu  $a = e$ . Da nun die Ableitung von  $\ln x$  die Funktion  $x^{-1}$  ergibt, erhält man

$$\int_1^x x^{-1} dx = \ln x. \quad (5)$$

Allgemeine, leicht einsehbare Regeln sind:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (6)$$

$$\int (g(x) + f(x)) dx = \int g(x) dx + \int f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (8)$$

$$\int g'(x) f(x) dx = g(x) f(x) - \int g(x) f'(x) dx \quad (9)$$

Aus der Umkehrung der Differentiation folgen:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{mit } n \neq -1 \quad (10)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln x + C \quad (12)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (13)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (14)$$

### Beispiel 2

Wie groß ist die Fläche unter der Sinuskurve von  $x = 0$  bis  $x = 2^{-1}\pi$ ?

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2^{-1}\pi} \sin x dx \\ &= -\cos(2^{-1}\pi) - (-\cos 0) \\ &= -0 + 1 \\ F &= 1 \end{aligned}$$

Dagegen wäre  $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ , weil die unter der x-Achse liegenden Flächen negativ zu nehmen sind.

Während die Differentiation jeder noch so komplizierten, aber stetigen Funktion gelingt, gilt dies nicht für die Integration. Oftmals muß man probieren, um zum Ziel zu gelangen, noch viel häufiger existiert eine geschlossene hinschreibbare Lösung gar nicht. Neue, sogenannte transzendente Funktionen entstehen, wie im Beispiel  $x^{-1} \rightarrow \ln x$ .

Allgemein gilt:

Natürliche Zahlen	, addieren	→ natürliche Zahlen
	, subtrahieren	→ 0 und negative Zahlen
	, multiplizieren	→ Natürliche Zahlen
	, dividieren	→ Rationale Zahlen
	, potenzieren	→ Natürliche Zahlen
	, Wurzeln	→ Irrationale Zahlen
Differenzieren	, bekannte Funktionen	→ bekannte Funktionen
Integrieren	, bekannte Funktionen	→ neue Funktionen

Man erkennt, daß die Umkehrung der Operation jeweils neue mathematische Objekte schafft. Die Wurzeln erzeugen übrigens auch noch die komplexen Zahlen.

Da Integrale nicht immer leicht zu lösen sind, werden Lösungen in Tabellenform angeboten.

### Beispiel 3

Welche Energie ist nötig, um 1 kg Masse von der Erdoberfläche ins Unendliche zu bringen?

Da das Kraftgesetz nach Newton

$$F = \gamma m_1 m_2 r^{-2}$$

lautet, ist die Arbeit für ein kurzes Anheben  $dL = F dr$  und demnach

$$\begin{aligned} \int_R^\infty dL &= \int_R^\infty \gamma m_1 m_2 r^{-2} dr \\ L &= \gamma m_1 m_2 \left( \infty^{-1} - R^{-1} \right) \\ L &= -\gamma m_1 m_2 R^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ergibt mit

$$\begin{aligned} R &= 6.375 \cdot 10^6 m \\ \gamma &= 6,67 \cdot 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2} \\ m_1 &= 1 kg \\ m_2 &= 5,95 \cdot 10^{24} kg \\ \mathbf{L} &= \mathbf{6,23 \cdot 10^7 J.} \end{aligned}$$

Aus  $\frac{1}{2} m v^2 = L$  folgt für die Fluchtgeschwindigkeit  $v = 11,16 km/s$ .

Wenn man den Kreisumfang bei bekanntem Radius gemäß  $U = 2\pi r$  berechnen kann, gelingt auch die Berechnung der Kreisfläche. Ein schmaler Kreisring hat die Fläche

$$\begin{aligned} dF &= 2\pi r \, dr \\ \int_0^R dF &= 2\pi \int_0^R r \, dr \\ &= 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \\ F &= \pi R^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Integration wird also immer dann eingesetzt, wenn ein Ganzes als Summe unendlich vieler, unendlich kleiner Teile des Ganzen aufgefaßt werden kann.

**Beispiel 4**

Man integriere  $\int \sin x \cos x \, dx$ . Man setzt  $\sin x = g'(x)$ ,  $\cos x = f(x)$ . Dann ist  $g(x) = -\cos x$  und  $f'(x) = -\sin x$

$$\begin{aligned} \text{somit} \quad \int \sin x \cos x &= -\cos^2 x - \int (-\cos x)(-\sin x) \, dx \\ \text{und} \quad 2 \int \sin x \cos x \, dx &= -\cos^2 x \\ \int \sin x \cos x \, dx &= -\frac{1}{2} \cos^2 x \\ \text{Probe:} \quad \frac{d(-\frac{1}{2} \cos^2 x)}{dx} &= 2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cos x (-\sin x) \\ &= \sin x \cos x \end{aligned}$$

Differentiation kann immer als Probe eingesetzt werden.

Interessant ist, daß für  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$  geschrieben werden kann und deshalb

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx. \tag{16}$$

Im letzteren Fall kann die Einsetzungsmethode benutzt werden:  $2x = z$ .

$$\frac{dz}{dx} = z \quad \text{und} \quad dx = \frac{1}{2} dz$$

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin z \, dz$$

ist dann zu lösen. Man erhält

$$\frac{1}{2} \int \sin z \, dz = -\frac{1}{2} \cos 2x,$$

wenn man nach dem Lösen wieder  $2x = z$  setzt. Nun sind da zwei verschiedene Lösungen. Man darf aber die Integrationskonstante  $C$  nicht vergessen:

$$-\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 = -\cos^2 x + C_2$$

$C_1$  und  $C_2$  werden zu  $C$  zusammengefaßt:

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x = C_1 + C_2 = C$$

Da  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ , wird

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x &= C \\ \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) &= \frac{1}{2} = C \end{aligned}$$

In der Tat unterscheiden sich beide Ergebnisse nur um die Differenz  $2^{-1}$ . Wenn man zu  $y = -\cos^2 x$  und  $y = -2^{-1} \cos 2x$  die Kurven zeichnet, erhält man zwei um  $2^{-1}$  voneinander entfernte Kurven (siehe Abbildung ??).

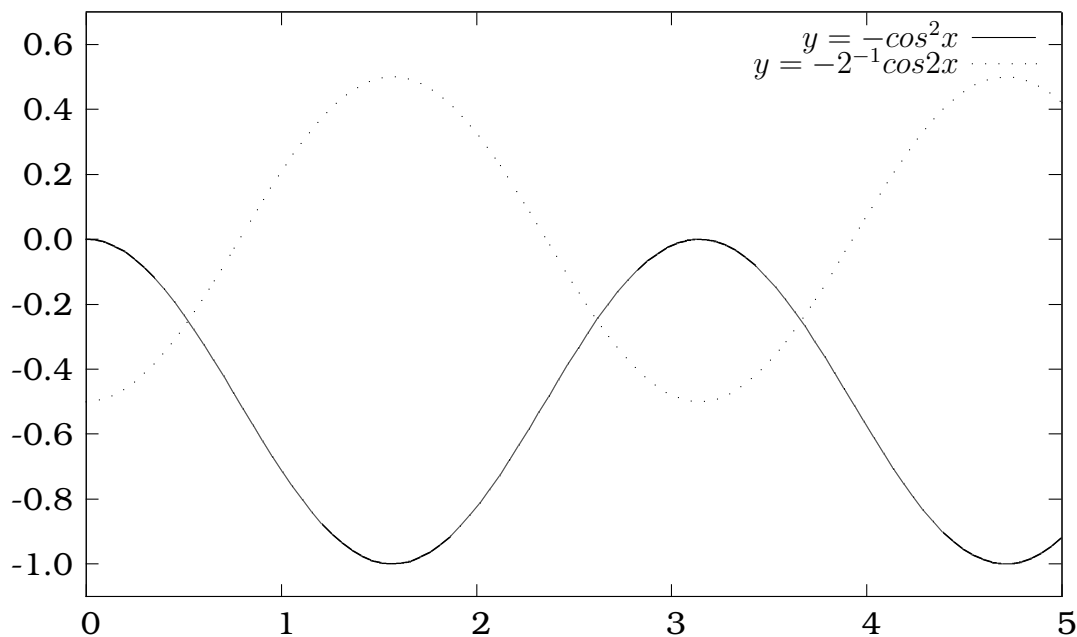


Abbildung 1: Die Funktionsgraphen zu  $y = -\cos^2 x$  und  $y = -2^{-1} \cos 2x$

Man darf sich also nicht irritieren lassen, wenn an sich gleiche Integranden (die Funktionen »unter« dem Integral) scheinbar verschiedene Integrale ergeben.

Unlösbare Integrale werden, besonders wenn sie zu häufig benutzten Funktionen gehören, tabelliert. Für Computer existieren heute natürlich fertige Programme zur numerischen Berechnung. eine solche Funktion ist die Gauß'sche Glockenkurve  $y = e^{-x^2}$ .

### Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9		Bri	Dokumenterstellung
1.0	07.12.2004	Bri	EDV-Satz des Dokuments
1.1	21.05.2005	Bri	Adressänderungen aufgrund Domainwechsel