Goniometrie

Tobias Brinkert
eMail: <t.brinkert@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

21.05.2005
Version: 1.1

Inhaltsverzeichnis

1. Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

mit a = Gegenkathete, b = Ankathete und c = Hypothenuse

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= a\cdot c^{-1} & \csc\alpha &= c\cdot a^{-1} = (\sin\alpha)^{-1}\\ \cos\alpha &= b\cdot c^{-1} & \sec\alpha &= c\cdot b^{-1} = (\cos\alpha)^{-1}\\ \tan\alpha &= a\cdot b^{-1} & \cot\alpha &= b\cdot a^{-1} = (\tan\alpha)^{-1}\end{aligned}$$

2. Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sin(\varphi\pm 2n\pi)\\ \cos\varphi &= \cos(\varphi\pm 2n\pi)\\ \tan\varphi &= \tan(\varphi\pm 2n\pi)\\ \cot\varphi &= \cot(\varphi\pm 2n\pi)\end{aligned}$$

mit $n \in N$ und φ in rad.

3. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen desselben Winkels

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}\\ \cos\varphi &= \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cot\varphi\left(\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}\right)^{-1} = \pm\left(\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right)^{-1}\\ \tan\varphi &= \pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\cot\varphi} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}\\ \cot\varphi &= \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi} = \pm\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\end{aligned}$$

4. Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha+\beta) &= (\tan\alpha+\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)^{-1}\\ \tan(\alpha-\beta) &= (\tan\alpha-\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)^{-1}\\ \cot(\alpha+\beta) &= (\cot\alpha\cot\beta-1)(\cot\alpha+\cot\beta)^{-1}\\ \cot(\alpha+\beta) &= (\cot\alpha\cot\beta+1)(\cot\beta-\cot\alpha)^{-1}\end{aligned}$$

5. Summen und Differenzen trigonomischer Funktionen

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \\
\tan\alpha + \tan\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
\tan\alpha - \tan\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
\cot\alpha + \cot\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \\
\cot\alpha - \cot\beta &= -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \\
\cos\alpha + \sin\beta &= \sqrt{2}\sin(45^o+\alpha) \quad = \sqrt{2}\cos(45^o-\alpha) \\
\cos\alpha - \sin\beta &= \sqrt{2}\cos(45^o+\alpha) \quad = \sqrt{2}\sin(45^o-\alpha) \\
\sin^2\alpha + \cos^2\beta &= 1 \\
1+\tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
1+\cot^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha}
\end{aligned}
$$

6. Produkte und Quotienten trigonometrischer Funktionen

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} &= \tan\varphi \quad = \frac{1}{\cot\varphi} \\
\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &= \cot\varphi \quad = \frac{1}{\tan\varphi} \\
\tan\varphi\cot\varphi &= 1 \\
\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha \\
\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) &= \cos^2\beta - \sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta} = -\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\cot\alpha\cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} = -\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$\tan\alpha\cot\beta = \frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta} = -\frac{\tan\alpha-\cot\beta}{\cot\alpha-\tan\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}\left[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\left[-\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta\gamma)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\left[-\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\left[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

7. Potenzen von trigonometrischen Funktionen

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\varphi)\right]$$

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}\left[3\sin\varphi - \sin(3\varphi)\right]$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}\left[\cos(4\varphi) - 4\cos(2\varphi) + 3\right]$$

$$\sin^5\varphi = \frac{1}{16}\left[10\sin\varphi - 5\sin(3\varphi) + \sin(5\varphi)\right]$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\varphi)\right]$$

$$\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\left[3\cos\varphi + \cos(3\varphi)\right]$$

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\left[\cos(4\varphi) + 4\cos(2\varphi) + 3\right]$$

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\left[10\cos\varphi + 5\cos(3\varphi) + \cos(5\varphi)\right]$$

8. Funktionen der einfachen Winkel

$$\sin\varphi = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[1-\cos(2\varphi)\right]} = \frac{2\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)}{1+\tan^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)}$$

$$\cos\varphi = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)-\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) = 1-2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)-1$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)}{1+\tan^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[1+\cos(2\varphi)\right]}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)}{1-\tan^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)} = \frac{2}{\cot\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)-\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\varphi)}{1+\cos(2\varphi)}}$$

$$= \frac{\sin(2\varphi)}{1+\cos(2\varphi)} = \frac{1-\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cot^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)-1}{2\cot\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)} = \frac{1}{2}\left[\cot\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)-\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\right] = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\varphi)}{1-\cos(2\varphi)}}$$

$$= \frac{\sin(2\varphi)}{1-\cos(2\varphi)} = \frac{1+\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)}$$

9. Funktion der halben Winkel

$$\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}$$

$$\tan\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\cot\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

10. Funktionen der doppelten Winkel

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi-\sin^2\varphi = 1-2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi-1 = \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

$$\tan(2\varphi) = 2\frac{\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = 2\frac{1}{\cot\varphi-\tan\varphi}$$

$$\cot(2\varphi) = \frac{\cot^2\varphi-1}{2\cot\varphi} = \frac{1}{2}(\cot\varphi-\tan\varphi)$$

11. Funktionen des mehrfachen Winkels

$$\begin{aligned}
\sin(3\varphi) &= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \\
\sin(4\varphi) &= 4\sin\varphi\cos\varphi - 8\sin^3\varphi\cos\varphi \\
\sin(5\varphi) &= 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi \\
\cos(3\varphi) &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\
\cos(4\varphi) &= 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1 \\
\cos(5\varphi) &= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi \\
\tan(3\varphi) &= \frac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1 - 3\tan^2\varphi} \\
\tan(4\varphi) &= \frac{4\tan\varphi - 4\tan^3\varphi}{1 - 6\tan^2\varphi + \tan^4\varphi} \\
\cot(3\varphi) &= \frac{\cot^3\varphi - 3\cot\varphi}{3\cot^2\varphi - 1} \\
\cot(4\varphi) &= \frac{\cot^4\varphi - 6\cot^2\varphi + 1}{4\cot^3\varphi - 4\cot\varphi}
\end{aligned}$$

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9		Bri	Dokumenterstellung
1.0	16.12.2004	Bri	EDV-Satz des Dokuments
1.1	21.05.2005	Bri	Adressänderungen aufgrund Domainwechsel