Differentialrechnung

Tobias Brinkert
eMail: <t.brinkert@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

21.05.2005
Version: 1.2

Anschaulich formuliert, gestaltet die Differentialrechnung die Bestimmung des Anstiegs einer Kurve der Funktion $y = f(x)$. Daher muß ein Grenzwert für

$$m = \frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x) - x}$$

für den Fall, daß Δx gegen Null geht, existieren. Diesen Grenzwert nennt man $f'(x)$, die erste Ableitung der Funktion nach x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \right] \tag{1}$$

Eine abgeleitete Funktion (oder differenzierte Funktion) kann nochmals abgeleitet werden. Man erhält dann $f''(x)$, $f'''(x)$ und so fort.

Beispiel 1

$$\begin{aligned}
y &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{(x + \Delta x) - x} \right] \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} \right] \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} [2x - \Delta x] \\
f'(x) &= 2x
\end{aligned}$$

Für den vollzogenen Grenzübergang wird

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

und liest dy nach dx (nicht »durch«).

Für die Differentiation einer Summenfunktion gilt:

$$\frac{d\,(f\,(x) + g\,(x))}{dx} = f'\,(x) + g'\,(x)$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{lll}
y = x^2 + x & f\,(x) = x^2 & g\,(x) = x \\
 & f'\,(x) = 2x & g'\,(x) = 1 \\
y' = 2x + 1 & &
\end{array}$$

Die Differentiation eines Funktionenprodukts

$$y = f(x)\, g(x)$$

kann ebenfalls über Grenzwertbildung gefunden werden:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x)}{(x+\Delta x) - x} \right] \\ y' &= \frac{f(x+dx)\, g(x+dx) - f(x)\, g(x)}{dx} \end{aligned}$$

Da oben, wie am Anfang gezeigt, $f'(x) = dy\,(dx)^{-1}$, kann

$$f(x+dx) = f(x) + dy = f(x) + f'(x)\, dx$$

gesetzt werden. Da dx und dy genau genommen unendlich kleine Größen sind, stellt die Abbildung **??** sozusagen eine unendliche Vergrößerung des Ausschnitts dar.

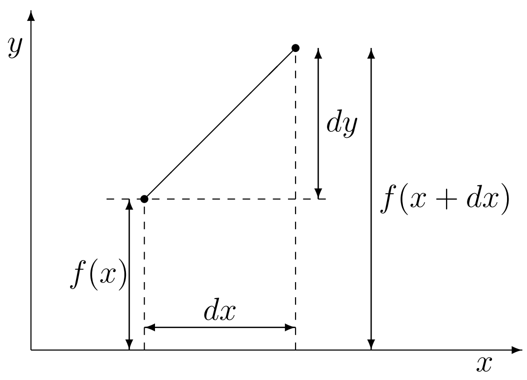

Abbildung 1: unendliche Vergrößerung des Ausschnitts

Somit erhält man

$$\begin{aligned} y' &= \frac{[f(x) + f'(x)\, dx]\,[g(x) + g'(x)\, dx] - f(x)\, g(x)}{dx} \\ y' &= \frac{[f'(x)\, g(x) + f'(x)\, g(x)]\, dx + f'(x)\, g'(x)\, dx^2}{dx} \\ y' &= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Wenn $f'(x)$ und $g'(x)$ endlich sind, ergibt das Dreierprodukt einen beliebig keleine Wert und so bleibt

$$y' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\,. \tag{3}$$

Beispiel 3: ***Man leite die Funktion*** $y = x^3$ ***ab.***

$$y = x^3 = x \cdot x^2 = f(x)\, g(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \qquad g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 1 & \qquad g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x \\ y &= 3x^2 \end{aligned}$$

Da insbesondere $y = x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ geschrieben werden kann, wird

$$y' = \frac{dx}{dx} \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x + x\frac{dx}{dx} \cdot x \cdot \ldots \cdot x + \ldots + x \cdot x \cdot \ldots \cdot \frac{dx}{dx}$$

und somit, wegen $(dx)(dx)^{-1} = 1$

$$y' = nx^{n-1} \tag{4}$$

Obiges Beispiel gilt für $n = 3$.

Neben $y = x$ mit $y' = 1$ existiert der weitere einfache Fall $y = a$ mit $y' = 0$, wenn a eine Konstante ist.

Die Differentiation der Exponentialfunktion $y = a^x$ führt zu

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a^{x+dx} - a^x}{dx} \\ y' &= a^x \frac{a^{dx} - 1}{dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Da $a^0 = 1$, muß a^{dx} nahe 1 sein. Jede Exponentialfunktion $y = a^x$ ergibt für $x = 0$ den Wert $y = 1$. Nun sei a so gewählt, daß der Anstieg in diesem Punkt $y'(x = 0) = 1$ sei. Dann aber ist $dx = dy$ und $a^{dx} = 1 + dx$ und somit

$$\begin{aligned} y' &= a^x \frac{1 + dx - 1}{dx} \\ y' &= a^x. \end{aligned} \tag{6}$$

Man müßte nun nur noch das a ermitteln, das oben geforderte Bedingung erfüllt. Da $2^{0,001} = 1,0007$ und $4^{0,001} = 1,0014$ ergibt, im ersten Fall der Anstieg 0,7 – im zweiten Fall 1,4 wird – muß gelten

$$2 < a < 4.$$

Wenn man die Kurven zu $y = 2^x$ und $y = 4^x$ zeichnet, kann man die Anstiege durch Tangentenzeichnen erhalten.

Man liest die Anstiege $m_1 = 1,5$ und $m_2 = 0,7$ für $x > 0$ ab. Für $a = 3$ mit $\sqrt{3} = 1,73$, dann $\sqrt[4]{3} = 1,32$, schließlich bei $\sqrt[8]{3} = 1,15$ wird $m = 0,15/0,125 = 1,2$ – jedoch liegt man immer noch zu hoch. Damit der Anstieg $m = 1$ wird muß gelten

$$\lim_{n\to\infty} a^{n^{-1}} = 1 + \frac{1}{n}, \tag{7}$$

wobei n^{-1} gegen dx geht. Zur n.ten Potenz erhoben, wird daraus

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{8}$$

Diese Zahl wird »e« genannt.

Ein Taschenrechner liefert mit $n = 10$ $e \approx 2,59$, mit $n = 100$ $e \approx 2,70$ und mit $n = 10^9$ $e \approx 2,7182818$. Nunmehr hat man

$$y = e^x \qquad\qquad y' = e^x. \tag{9}$$

Man hat hier den seltsamen Fall, daß Stammfunktion und abgeleitete Funktion einander gleich sind. Die dabei erhaltene Zahl e hat in der Mathematik die gleiche Bedeutung wie π. Da $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$ – wobei $\ln x$ die Umkehrfunktion zu e^x, gelesen »logarithmus naturalis«, ist – kann a^x abgeleitet werden, wenn man weiß, wie der konstante Faktor $\ln x$ bei x zu behandeln ist.

Die Herleitung gelingt, wenn man sogenannte Schachtelfunktionen untersucht:

$$y = f(z) = f(z(x)).$$

Dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}. \tag{10}$$

Beispiel 4: ***Man leite $y = (2x+4)^4$ ab.***

Zunächst hat man $y = z^4$. Hier gilt $dy\,(dz)^{-1} = 4z^3$. Schließlich gilt noch $z = 2x+4$ mit $dz\,(dx)^{-1} = 2$ und als Ganzes

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 4\,(2x+4)^3 \cdot 2 \\ y' &= 8\,(2x+4)^3. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $y = f(ax) = f(z)$:

$$y' = af'(z) = af'(ax).$$

Im Falle $y = a^x$ also $y' = a^x \ln a$.

Auch weitere Verschachtelungen sind ableitbar. Es sei $y = f(z(w(x)))$. Hier gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dw}\frac{dw}{dx}.$$

Beispiel 5

$$\begin{aligned} y &= \left(\left(x^2+4x\right)^3 + \left(x^2+1\right)^3\right)^4 \\ y' &= 4\left(3\left(x^2+4x\right)^2(2x+4) + 3\left(x^2+1\right)^2 \cdot 2\right)^3 \\ y' &= 12\left(\left(x^2+4x\right)^2 2\,(x+2) + 2\left(x^2+1\right)^2\right)^3 \\ y' &= 24\left(\left(x^2+4x\right)^2 (x+2) + \left(x^2+1\right)^2\right)^3 \end{aligned}$$

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus $y = \ln x$, der Umkehrfunktion zu $y = e^x$ erhält man über

$$y' = \frac{\ln(x+dx) - \ln x}{dx}$$

$$y' = \frac{\ln x\left(1+\frac{dx}{x}\right)-\ln x}{dx}.$$

Da für $\ln ab = \ln a + \ln b$ gilt, wird

$$y' = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)-\ln x}{dx}.$$

Da der Punkt $P(x=1, y=0)$ dem Punkt $Q(x=0, y=1)$ zur Funktion e^x entspricht, hat der natürliche Logarithmus in p den Abstieg $m=1$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) &= \frac{dx}{x} \qquad \text{und} \\ y' &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Hier ist das Bindeglied zwischen den transzendenten Funktionen, hier $y = \ln x$, und den gebrochenen rationalen Funktionen zu sehen.

Auch zu den Winkelfunktionen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ und $y = \tan(x)$ existieren die Ableitungen.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d\sin(x)}{dx} \\ y' &= \frac{\sin(x)\cos(dx)+\cos(x)\sin(dx)-\sin(x)}{dx} \\ y' &= \frac{\sin(x+dx)-\sin(x)}{dx} \\ y' &= \frac{\sin(x)+\cos(x)\sin(dx)-\sin(x)}{dx} \qquad \text{mit } \sin(dx)=dx \\ y' &= \cos(x) \end{aligned} \tag{12}$$

Da $\cos(x) = \sin(x+2^{-1}\pi)$, wird

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d\cos(x)}{dx} = \cos\left(x+2^{-1}\pi\right) \\ y' &= -\sin(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Da $y = \tan(x) = \sin(x)\,[\cos(x)]^{-1}$, müßte man eine Regel für einen Funktionenquotienten kennen. Man kann sich jedoch behelfen. Man schreibt:

$$\begin{aligned} y &= \tan(x)\cos(x) = \sin(x) \\ y' &= (\tan(x))'\cos(x) - \tan(x)\sin(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

und löst nach der unbekannten Funktion $(\tan(x))'$ auf:

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \frac{\cos(x)+\sin(x)\sin(x)\left(\cos(x)\right)^{-1}}{\cos(x)} \\ (\tan(x))' &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ y' = \frac{d\tan(x)}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned} \tag{14}$$

Gebrochene Hochzahlen werden wie ganze Hochzahlen behandelt:

$$y = x^{n^{-1}} \qquad x = y^n \qquad \frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = n^{-1}x^{n^{-1}(1-n)} = n^{-1}x^{n^{-1}-1} \tag{15}$$

Die Quotientenregel erhält man über die Produktregel wie schon bei der Herleitung der Differentiation des Tangens.

$$\begin{aligned}
y &= u(x) \\
y(x)\,v(x) &= u(x) \\
y'v + yv' &= u' \\
y' &= \frac{u' - yv'}{v} \\
y' &= \frac{u' - \frac{v'u}{v}}{v^2} \\
y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 6

$$y = \tfrac{x^2-4}{x^2+4} \qquad u = x^2 - 4 \qquad v = x^2 + 4$$
$$y' = \tfrac{2x\left(x^2+4\right)-2x\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$y' = \tfrac{2x^3+8x-2x^3+8x}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$y' = \tfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

oder:

$$y = x^{-n} \qquad \text{mit} \qquad u = 1, v = x^n$$
$$y' = \tfrac{0\cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n}$$
$$y' = -nx^{-1-n}$$

d.h. die Potenzregel gilt für alle n, ob nun ganzzahlig, negativ oder gebrochen.

Der Differentialrechnung bieten sich viele Anwendungen. Sie gestattet zum Beispiel die Berechnung von Extremwerten einer Funktion, also der Lage von Maxima und Minima und der Lage von Wendepunkten.

Beispiel 7

$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$
Ein extrem liegt vor, wenn der Anstieg der Kurve Null ist.

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ x_{1;2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} \\ x_1 &= -1\ ,\ y_1 = 1 \\ x_2 &= 3\ ,\ y_2 = -31 \end{aligned}$$

Ein Wendepunkt zeichnet sich durch besonders hohen Anstieg aus, also muß $y'' = 0$ sein:

$$\begin{aligned} y'' &= 6x - 6 = 0 \\ x_3 &= 1\ ,\ y_3 = -15. \end{aligned}$$

Wenn man zu y, y' und y'' die Kurven zeichnet, werden die Zusammenhänge anschaulich klar (siehe Abbildungen **??** - **??**).

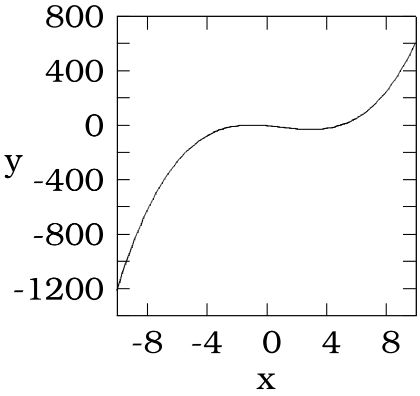

Abbildung 2: Funktionsgraph $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$

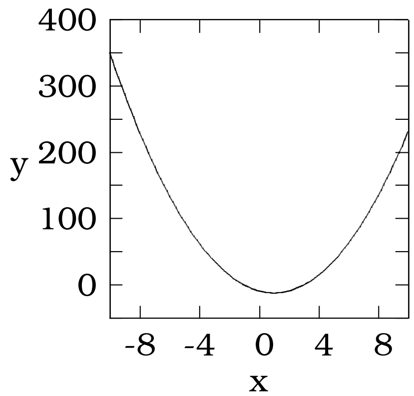

Abbildung 3: Die erste Ableitung ($y' = 3x^2 - 6x - 9$)

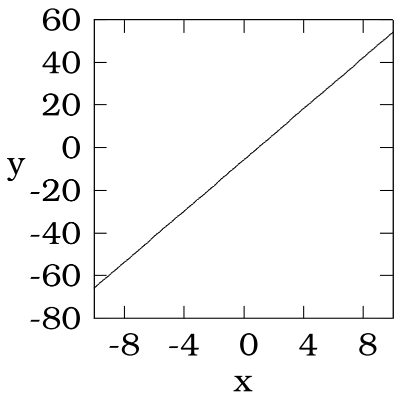

Abbildung 4: Die zweite Ableitung ($y'' = 6x - 6$)

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9		Bri	Dokumenterstellung
1.0	28.11.2004	Bri	EDV-Satz des Dokuments
1.1	25.12.2004	Bri	Fehler in Beispiel 2. und 3. behoben
1.2	21.05.2005	Bri	Adressänderungen aufgrund Domainwechsel