Beweis der goniometrischen Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ mithilfe der Reihenausdrücke

Tobias Brinkert
eMail: <t.brinkert@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

16.05.2005
Version: 1.1

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

Sets man $i \cdot x$ für x in e^x mit $i^2 = -1$:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots$$

wobei $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ..., woraus folgt:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

Das ist die berühmte Euler'sche Formel, durch die die Exponentialfunktion sowie die Logarithmusfunktion miteinander verbunden wird zur sin- und cos-Funktion. Ihr gemäß ist für $x = 1$, $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$ und für $x = 2^{-1}\pi = 90^o$, $e^{0,5i\pi} = i$.

Die Euler'sche Formel dient der Fortführung unseres Beweises.

Gemäß Euler'scher Formel ist:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Es ist aber auch:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left[\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\right]$$

Man nennt eine Zahl der Form $x + iy$ eine komplexe Zahl. Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sie in beiden Teilen gleich sind.

Daher gilt im obigen Fall der Anwendung der Euler'schen Formel:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \text{und}\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\,.\end{aligned}$$

Die Euler'sche Formel liefert insbesondere:

$$\boxed{i^i = \left(e^{0,5i\pi}\right)^i = e^{-0,5\pi} = 0,20787\ldots}$$

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9		Bri	Dokumenterstellung
1.0	27.11.2004	Bri	EDV-Satz des Dokuments
1.1	16.05.2005	Bri	Adressänderungen aufgrund Domainwechsel